Anfangsgründe

der

analytischen Geometrie

und der

Lehre von den Kegelschnitten

für

den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Karl Koppe,
Professor.

Mit 12 Figurentafeln.

Essen,
Druck und Verlag von G. D. Bädeker.
1868.

Vorrede.

Bei der Ausarbeitung dieser Schrift hat der Verfasser vorzüglich dahin gestrebt, mit mathematischer Strenge in den Ableitungen möglichste Anschaulichkeit und Faßlichkeit in der Darstellung zu verbinden. Demgemäß sind die Kegelschnitte zuerst als geometrische Oerter aufgefaßt, hieraus die hauptsächlichsten Eigenschaften derselben abgeleitet und demnächst zu weiteren Ableitungen die analytischen Methoden benutzt worden.

Da die dem mathematischen Unterrichte in vielen Schulen nur sparsam zugemessene Zeit oder andere Umstände dazu nöthigen können, den Vortrag der Kegelschnitte auf die Darlegung der wichtigsten Eigenschaften derselben, insbesondere derjenigen zu beschränken, deren Kenntniß für das Verständniß des physikalischen Unterrichts unentbehrlich ist, so sind die minder wichtigen und leichter zu entbehrenden Sätze, welche auch ohne Störung des Zusammenhangs gänzlich übergangen werden können, mit vorgesetzten Sternchen (*) bezeichnet worden. Aber auch da, wo die Verhältnisse günstiger liegen, dürfte es zweckmäßig sein, bei der ersten Einführung in den Gegenstand zunächst nur die in den Sätzen ohne Sternchen enthaltenen Hauptlehren den Schülern vorzutragen und die Sätze mit Sternchen einem zweiten Cursus vorzubehalten. Da diese hiernach für schon geübtere Leser bestimmt sind, jene dagegen auch den weniger geübten Lesern zugänglich sein sollen, so sind in den Sätzen ohne Sternchen die vorzunehmenden Entwicklungen ausführlicher vorgetragen, während in den Sätzen mit Sternchen und mehrentheils auch in den Anmerkungen eine kürzere Fassung angewendet worden ist.

Möge diese Schrift dazu beitragen, der so anziehenden Lehre von den Kegelschnitten zahlreiche Freunde zu gewinnen.

Soest, im Juni 1868.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Von den Coordinaten-Systemen.

---

§. 1. Erklärung.

Um mehrere Punkte in einer Ebene mit einander vergleichen und die zwischen ihnen stattfindenden Beziehungen durch Rechnung entwickeln zu können, ist die Annahme gewisser fester Punkte und Linien in der Ebene und die Kenntniß solcher Größen erforderlich, durch welche die Lage der fraglichen Punkte gegen die gegebenen Punkte oder Linien festgestellt wird. Zu dieser Bestimmung gelangt man bequem zunächst durch das folgende Verfahren:

In der Ebene werden zwei sich unter irgend einem Winkel schneidende Linien, Axen, AX und AY, Fig. 1., angenommen; der einen derselben, z. B. AX gibt man den Namen Abscissenaxe, die andere AY aber nennt man Ordinatenaxe. Diese beiden Axen zerschneiden die Ebene, in welcher sie liegen, in vier Winkel, welche man auch Regionen nennt. Eine dieser Regionen nimmt man als erste an und zählt dann die übrigen nach der Reihe herum als zweite, dritte und vierte Region. — Um nun die Lage eines Punktes in einer dieser Regionen, z. B. des Punktes B in der ersten Region gegen die Axen festzustellen, zieht man durch diesen Punkt mit den Axen und bis zum Einschnitte in dieselben parallele Linien BC und BD. Den Maßzahlen der durch diese Construction von den Axen abgeschnittenen Stücke AD und AC gibt man den Namen Coordinaten, und zwar nennt man insbesondere die Maßzahl des auf die Abscissenaxe fallenden Abschnitts AD die Abscisse, die Maßzahl aber des auf der Ordinatenaxe liegenden Abschnitts AC die Ordinate des Punktes B.

Liegt der festzustellende Punkt nicht in der ersten, sondern in einer der drei andern Regionen, so verfährt man bei Feststellung der Lage desselben in der nämlichen Weise, wie oben angegeben, jedoch mit dem Unterschiede, daß man, um anzuzeigen, in welcher Region der fragliche Punkt liegt, die Maßzahlen der durch die angezeigte Construction auf den Axen gebildeten Abschnitte nur dann als positiv annimmt, wenn diese Abschnitte auf den Schenkeln AX und AY liegen, welche die erste Region einschließen, dieselben dagegen als negativ bezeichnet, wenn sie auf die über A fortgesetzten Verlängerungen dieser Schenkel fallen. Hiernach ist z. B. für den Punkt

B	in der	ersten	Region	die Abscisse	+ AD,	die Ordinate		+ AC
E	„ „	zweiten	„	„ „	— AG,	„	„	+ AF
H	„ „	dritten	„	„ „	— AL,	„	„	— AK
M	„ „	vierten	„	„ „	+ AO,	„	„	— AN.

§. 2. Zusatz.

1) Man sieht hiernach leicht, daß ein Punkt vollständig bestimmt ist und durch eine einfach auszuführende Construction erhalten werden kann, wenn seine Coordinaten gegeben sind.

2) Zur Vereinfachung der Zeichnung pflegt man durch den zu bestimmenden Punkt nur die Parallele mit der Ordinatenaxe AY, Fig. 1., wirklich zu ziehen und hierdurch von der Abscissenaxe AX die Abscisse abzuschneiden, dagegen, z. B. für die Punkte B, E, H und M die Ordinaten

+ AC, + AF, — AK, — AN

beziehlich durch + BD, + EG, — LH, — OM zu ersetzen.

3) Weiter folgt aus dem vorherg. §., daß die Abscissen (so wie die Cosinus in der Trigonometrie) in der ersten und vierten Region positiv, in der zweiten und dritten negativ, die Ordinaten aber (so wie die Sinus) in der ersten und zweiten Region positiv, in der dritten und vierten negativ sind.

4) Liegt ein Punkt in der Abscissen- oder Ordinatenaxe, so ist im ersten Falle seine Ordinate, im andern seine Abscisse gleich Null zu setzen. Für den Anfangspunkt A der Coordinaten sind also sowohl Abscisse als Ordinate gleich Null.

5) Man unterscheidet rechtwinklige und schiefwinklige Coordinatenaxen, je nachdem sich dieselben unter rechten oder schiefen Winkel schneiden. Im Folgenden werden wir bei weitem am häufigsten die ersteren anwenden.

§. 3. Erklärung.

Ein anderes Verfahren, die Lage eines oder mehrerer Punkte in der Ebene festzustellen, besteht darin, daß man in der Ebene einen festen Punkt A, Pol, und eine von demselben ausgehende Linie AB, Axe, annimmt, Fig. 2. Die Lage irgend eines Punktes C in der Ebene wird nun bestimmt durch die Linie AC, Radius vector, welche diesen Punkt mit dem Pole verbindet, und durch den Winkel, Abweichungswinkel, um welchen die Axe AB in vorgeschriebener Richtung gedreht werden muß, um in die Lage des Radius vector AC überzugehen. Man pflegt den Abweichungswinkel auch die Anomalie zu nennen.

Nehmen wir an, daß diese Drehung in der Richtung geschehen soll, welche der in Fig. 2 beigefügte Pfeil anzeigt, und ersetzen wir der Kürze wegen die Abweichungswinkel durch die denselben zum Maße dienenden Bogen eines Kreises, welchen wir mit einem beliebigen Radius um den Pol A beschreiben, dann ist z. B. für den

Radius vector AC der Abweichungswinkel = bc

" " AD " " = bcd

" " AE " " = bcde u. dgl. m.

Da die Axe in die Lage irgend eines Radius vector sowohl durch Drehung nach der einen, als nach der entgegengesetzten Seite hin übergeführt werden kann, so kann man auch in ähnlicher Weise, wie wir in §. 1 die Abscissen- und Ordinaten, welche vom Anfangspunkte aus nach der einen Seite hin zu liegen kommen, von den nach der entgegengesetzten Seite fallenden durch die entgegengesetzten Vorzeichen (+) und (—) unterschieden haben, zur Bestimmung der Lage eines Radius vector sowohl die durch Drehung der Axe nach der einen, als nach der entgegengesetzten Richtung hin zu erzeugenden Abweichungswinkel (Anomalien) benutzen, indem man den Maßzahlen derselben die Zeichen (+) oder (—) vorschreibt, je nachdem die Drehung nach der einen oder andern Seite erfolgt ist. Hiernach können für die Strahlen

AC, AD, AE

die Abweichungswinkel eben so wohl durch

$+ bc, + bcd, + bcde$

als auch durch $- bcdc, - bcd, - bc$ ausgedrückt werden.

Der Radius vector und der Abweichungswinkel (die Anomalie) führen zusammen den Namen Polar-Coordinaten; zum Unterschiede hiervon nennen wir die in §. 1 behandelten Coordinaten Parallel-Coordinaten.

§. 4. Zusatz.

Da Winkel, welche sich um 360^0 oder ein Vielfaches von 360^0 unterscheiden, in der Zeichnung nicht von einander verschieden sind und überdies die nämlichen trigonometrischen Functionen haben, da ferner in den folgenden Entwicklungen niemals die Winkel selbst, sondern immer nur ihre trigonometrischen Functionen in Betracht gezogen werden, so werden wir zwei (positiv oder negativ ausgedrückte) Abweichungswinkel (Anomalien) auch dann einander gleich setzen, wenn dieselben um 360^0 oder ein Vielfaches von 360^0 von einander verschieden sind. Bezeichnet daher α einen in Graden ausgedrückten Abweichungswinkel, n eine beliebige (positive oder negative) ganze Zahl, so ist zufolge der vorstehenden Erklärung

$$\alpha = 360^0 + \alpha = n \,.\, 360^0 + \alpha.$$

Bemerkung. Wenn im Folgenden die Lage eines Punktes durch Polar- und durch Parallel-Coordinaten zugleich ausgedrückt wird, so ist allemal angenommen, daß die Axe der Polar-Coordinaten mit dem positiven Schenkel der Abscissenaxe zusammenfällt, und daß die Abweichungswinkel (Anomalien) an derjenigen Seite dieser Axe positiv genommen werden, an welcher die positiven Ordinaten liegen.

§. 5. Lehrsatz.

Sind x und y die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punktes, und bezeichnet r den Radius vector, φ den Abweichungswinkel für den nämlichen Punkt, so ist zufolge der Trigonometrie

$$1)\ \frac{x}{r} = \cos\varphi \text{ und } \frac{y}{r} = \sin\varphi,$$

also $$2)\ x = r\cos\varphi \text{ und } 2)\ y = r\sin\varphi,$$

ferner $$3)\ \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\varphi,$$

und wenn wir die Gleichungen (1) und (2) quadriren und dann addiren:

$$4)\ x^2 + y^2 = r^2,$$

da bekanntlich $\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1$ ist.

Die Gleichungen (1) und (2) setzen uns in den Stand, wenn von einem Punkte die Polar-Coordinaten gegeben sind, die rechtwinkligen Coordinaten dieses Punktes zu finden, und durch die Gleichungen (3) und (4) werden wir in den Stand gesetzt, aus den rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes die Polar-Coordinaten desselben abzuleiten.

*§. 6. Lehrsatz.

Bezeichnen x und y die Parallel-Coordinaten eines Punktes für zwei Axen AX und AY, Fig. 3, welche sich unter einem Winkel $YAX = \gamma$ *)

---

*) Es bezeichnet hier γ denjenigen Winkel, um welchen der positive Schenkel der Ordinatenaxe von dem positiven Schenkel der Abscissenaxe abweicht.

schneiden, und sind r und φ die Polar-Coordinaten dieses nämlichen Punktes,

so ist $$x = \frac{r \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \gamma} \text{ und } y = \frac{r \sin \varphi}{\sin \gamma}.$$

Beweis. Ist zunächst ein Punkt B in der ersten Region gegeben, dann ist in dem Dreiecke BAC

$$AC = \frac{AB \sin ABC}{\sin ACB} \text{ und } BC = \frac{AB \sin BAC}{\sin ACB}.$$

Nun ist aber $AB = r$, $AC = x$, $BC = y$, W. $ACB = 180^0 - \gamma$, W. $BAC = \varphi$ und W. $ABC = \gamma - \varphi$; hiernach verwandeln sich die vorstehenden Gleichungen in

$$x = \frac{r \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \gamma} \text{ und } y = \frac{r \sin \varphi}{\sin \gamma}.$$

Ist ferner ein Punkt D in der zweiten Region gegeben, so ist in dem Dreiecke DAE

$$AE = \frac{AD \sin ADE}{\sin AED} \text{ und } DE = \frac{AD \sin DAE}{\sin AED}.$$

Ersetzt man nun AD durch r, AE durch $-x$, da $x = -AE$ ist, DE durch y, W. AED durch γ, W. DAE durch $180^0 - \varphi$ und W. $ADE = DAH$ durch $\varphi - \gamma$, so gehen die zuletzt erhaltenen Gleichungen ebenfalls in die zu erweisenden über.

Dasselbe gilt in Hinsicht des Punktes F in der dritten Region von den Gleichungen

$$AE = \frac{AF \sin AFE}{\sin AEF} \text{ und } EF = \frac{AF \sin EAF}{\sin AEF},$$

wenn man AF durch r, AE durch $-x$, EF durch $-y$, W. AEF durch $180^0 - \gamma$, W. EAF durch $\varphi - 180^0$ und W. $AFE = FAK = EAK - EAF$ durch $\gamma - (\varphi - 180^0) = 180^0 + \gamma - \varphi$ ersetzt.

Endlich ist für einen Punkt G in der vierten Region in dem Dreiecke AGC

$$AC = \frac{AG \sin AGC}{\sin ACG} \text{ und } CG = \frac{AG \sin CAG}{\sin ACG},$$

und diese Gleichungen gehen ebenfalls in die zu erweisenden über, wenn man in denselben $AG = r$, $AC = x$, $CG = -y$, W. $ACG = \gamma$, W. $CAG = 360^0 - \varphi$ und W. $AGC = KAG = KAC - CAG = 180^0 - \gamma - (360^0 - \varphi) = \varphi - \gamma - 180^0$ setzt.

Zur gänzlichen Vollständigkeit würde auch noch die Erörterung der Fälle gehören, wenn der zu betrachtende Punkt in einem positiven oder negativen Schenkel der Abscissen- oder Ordinatenaxe liegt, worauf wir jedoch, da die Erledigung dieser Fälle sich äußerst leicht ergibt, um den Leser nicht zu ermüden, nicht weiter eingehen.

Bemerkung. Während der vorherg. §. zeigt, wie aus den Polar-Coordinaten eines Punktes sich die Parallel-Coordinaten desselben ergeben, erledigt der folgende §. die umgekehrte Aufgabe, aus den Parallel-Coordinaten die Polar-Coordinaten abzuleiten.

*§. 7. Zusatz.

Haben x, r, γ, r und φ die im vorherg. §. angegebene Bedeutung,

so ist $$\operatorname{tang} \varphi = \frac{y \sin \gamma}{x + y \cos \gamma} \text{ und } r^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \gamma.$$

Beweis. Die Richtigkeit dieser Gleichungen fällt für einen Punkt B, Fig. 3, in der ersten Region sofort in die Augen, da in dem Dreiecke ABC AB $= r$, AC $= x$, BC $= y$ und W. ACB $= 180^0 - \gamma$ ist. Ganz allgemein geht aber die Giltigkeit jener Gleichungen aus den beiden Gleichungen des vorherg. §.

$$x = \frac{r \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \gamma} = \frac{r \sin \gamma \cos \varphi - r \cos \gamma \sin \varphi}{\sin \gamma}$$

und $$y = \frac{r \sin \varphi}{\sin \gamma}$$

hervor. Denn wenn wir zunächst diese Gleichungen durch einander dividiren, so ergibt sich $$\frac{x}{y} = \sin \gamma \operatorname{cotg} \varphi - \cos \gamma,$$

also $$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{x + y \cos \gamma}{y \sin \gamma}$$ und folglich $$\operatorname{tang} \varphi = \frac{y \sin \gamma}{x + y \cos \gamma}.$$

Wenn wir ferner, um φ zu eliminiren, aus der zweiten Gleichung den Werth von $$\sin \varphi = \frac{y \sin \gamma}{r}, \text{ also } \cos \varphi = \frac{\sqrt{r^2 - y^2 \sin \gamma^2}}{r}$$

in die erste Gleichung einsetzen, so verwandelt sich dieselbe in
$$x = \sqrt{r^2 - y^2 \sin \gamma^2} - y \cos \gamma$$
oder
$$\sqrt{r^2 - y^2 \sin \gamma^2} = x + y \cos \gamma,$$
woraus durch Quadriren hervorgeht
$$r^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \gamma.$$

Die Gleichungen des §. 5 sind offenbar specielle Fälle der in den §§. 6 und 7 erwiesenen Gleichungen, welche in jene übergehen, wenn man in denselben $\gamma = 90^0$ annimmt.

Bemerkung. Obschon die Coordinatenaxen als gegeben anzusehen sind, so ist doch ihre Lage an und für sich eine ganz willkührliche und daher auch eine Veränderung derselben zulässig. Für spätere Entwicklungen ist nun die Aufgabe von besonderer Wichtigkeit, aus den Werthen, welche die Coordinaten eines Punktes für irgend ein Axensystem haben, die Werthe, welche dieselben für ein anderes, von jenem verschiedenes Axensystem annehmen, herzuleiten. Die folgenden §§. beschäftigen sich mit der Lösung dieser Aufgabe, wobei zunächst von der Annahme der einfacheren Fälle ausgegangen und hieraus dann weiter die ganz allgemeine, alle Fälle umfassende Lösung hergeleitet wird.

§. 8. Lehrsatz.

Verlegt man den Anfangspunkt A der Coordinaten, Fig. 4, nach einem andern Punkte A′ in der Abscissenaxe, und ist x die Abscisse eines beliebigen Punktes in der Ebene für den ersten, x′ die Abscisse des nämlichen Punktes für den zweiten Anfangspunkt, bezeichnet ferner p die Abscisse, durch welche die Lage des zweiten Anfangspunktes A′ gegen den ersten A bestimmt wird, so ist $$x = p + x'.$$
Dagegen hat die Ordinate eines jeden beliebigen Punktes in der Ebene für beide Anfangspunkte den nämlichen Werth.

Beweis. Wir haben hier zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem p positiv oder negativ ist. Ist

I. p positiv $= +$ AA′, so sind abermals drei Fälle zu berücksichtigen, wenn

1) der fragliche Punkt B an der positiven Seite der zweiten Ordinatenaxe $A'Y'$ liegt; dann ist $x = + Ab$, $x' = + A'b$, folglich

$$p + x' = AA' + A'b = Ab = x.$$

2) Wenn der in Betracht zu ziehende Punkt C zwischen beiden Ordinatenaxen liegt, so ist $x = + Ac$, $x' = - A'c$, daher

$$p + x' = AA' - A'c = + Ac = x.$$

3) Wenn endlich der festzustellende Punkt D an der negativen Seite der ersten Ordinatenaxe liegt, so ist $x = - Ad$, $x' = - A'd$, also

$$p + x' = + AA' - A'd = - Ad = x.$$

II. Wenn p negativ $= - AA'$ Fig. 5, ist, so denken wir uns, was offenbar frei steht, für einen Augenblick A' als ersten und A als zweiten Anfangspunkt; dann ist nach dem unter (I.) Erwiesenen für jeden in Betracht zu ziehenden Punkt $x' = AA' + x$,

also $x = - AA' + x' = p + x'$, w. z. b. w.

Um ganz vollständig zu sein, hätten wir auch in dem unter (I.) geführten Beweise die Fälle berücksichtigen müssen, wenn der in Betracht zu ziehende Punkt in der ersten oder in der zweiten Ordinatenaxe liegt. Wir haben jedoch diese beiden Fälle übergangen, da die Richtigkeit derselben sofort in die Augen fällt.

§. 9. Zusatz.

Dasselbe, was wir im vorherg. §. in Betreff der Abscissenaxe erwiesen haben, muß natürlich auch für die Ordinatenaxe gelten. Haben daher q, y und y' die nämliche Bedeutung in Hinsicht der Ordinatenaxe, welche wir oben den Buchstaben p, x und x' in Betreff der Abscissenaxe beigelegt haben, so werden wir die Gleichung aufstellen können

$$y = q + y'.$$

§. 10. Lehrsatz.

Wenn man zu zwei gegebenen Axen, welche sich im Punkte A, Fig. 6, durchschneiden, zwei denselben parallele Axen zieht, welche sich im Punkte A' durchschneiden, wenn dann x und y die Coordinaten irgend eines Punktes in der Ebene dieser Axenpaare für das erste, x' und y' die Coordinaten des nämlichen Punktes für das zweite Axenpaar und endlich p und q die Coordinaten bezeichnen, durch welche die Lage des zweiten Anfangspunktes A' gegen den ersten A bestimmt wird, so ist

$$x = p + x' \text{ und } y = q + y'.$$

Beweis. Ist z. B. in Fig 6 der Punkt B gegeben, so ist

$$x = AD = AE + ED = p + x'$$

und $$y = BD = BC + A'E = q + y'.$$

Die Figur stellt von der großen Mannigfaltigkeit der Fälle nur den einfachsten dar. Um die Richtigkeit des Satzes allgemein darzuthun, bezeichnen wir (ganz unabhängig von jeder Figur) mit E den Punkt, in welchem die zweite Ordinatenaxe die erste Abscissenaxe durchschneidet, und denken uns zunächst den Anfangspunkt der Coordinaten von A nach E verlegt; so erleidet die Ordinate keine Aenderung, zwischen der Abscisse x irgend eines Punktes in der Ebene für den Anfangspunkt A und der Abscisse x' des nämlichen Punktes für den Anfangspunkt E erhalten wir nach §. 8 die Gleichung

$$x = p + x'.$$

Verlegen wir nun weiter den Anfangspunkt der Coordinaten von E nach A', so ändert sich die Abscisse nicht weiter, aber zwischen den Ordinaten y und y' des fraglichen Punktes für die Anfangspunkte E und A' findet nach §. 9 die Gleichung statt

$$y = q + y'.$$

Es gelten daher die beiden obigen Gleichungen ganz allgemein, welche Lage auch immer der zweite Anfangspunkt A' gegen den ersten A und der festzustellende Punkt B gegen das erste oder zweite Axenpaar haben mag.

Für die spätere Anwendung dieser Gleichungen ist es vielleicht bequem, dieselben nach dem folgenden Wortlaut auszusprechen:

Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in einen andern Punkt, so ist die alte Abscisse (oder Ordinate) irgend eines dritten Punktes gleich der Summe aus der neuen Abscisse (oder Ordinate) dieses dritten Punktes und der Abscisse (oder Ordinate) des neuen Anfangspunktes in Beziehung auf den alten.

§. 11. Lehrsatz.

Sind x, y und x', y' die rechtwinkligen Coordinaten zweier Punkte, dann ist die Entfernung dieser Punkte

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

Beweis. Sind z. B. die beiden Punkte B und C, Fig. 7, gegeben, so ist, wenn wir Bb und Cc || AY und Bd || AX ziehen, Ab = x, Bb = y, Ac = x', Cc = y', folglich

$$r^2 = BC^2 = Bd^2 + Cd^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2.$$

Die Figur stellt jedoch nur einen einzelnen Fall dar; um die Richtigkeit des Satzes ganz allgemein darzuthun, denken wir uns den Anfangspunkt der Coordinaten in einen der gegebenen Punkte, welchen wir B nennen wollen, verlegt, und bezeichnen die Coordinaten des andern gegebenen Punktes, welcher C heißen soll, mit u und v; dann ist nach §. 5, welches auch immer die Lage der Punkte B und C sein mag,

$$r^2 = u^2 + v^2.$$

Nun ist aber nach dem vorherg. §.

$$x' = x + u \text{ und } y' = y + v,$$

also

$$u = x' - x \text{ und } v = y' - y,$$

wonach die zuletzt erwiesene Gleichung übergeht in

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2.$$

*§. 12. Lehrsatz.

Sind x, y und x', y' die Coordinaten zweier Punkte B und C, Fig. 8, für zwei Axen AX und AY, welche sich unter einem Winkel XAY = γ durchschneiden, und r = BC die Entfernung dieser Punkte, dann ist

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + 2(x' - x)(y' - y) \cos \gamma.$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich eben so aus §. 7 wie die des vorherg. aus §. 5.

*§. 13. Lehrsatz.

Sind x, y und x', y' die Coordinaten zweier beliebigen Punkte, und bezeichnen u, v die Coordinaten des Halbirungspunktes ihrer Verbindungslinie, dann ist

$$u = \frac{x + x'}{2} \text{ und } v = \frac{y + y'}{2}.$$

Beweis. Wenn zunächst die beiden gegebenen Punkte B und C, Fig. 8, in der ersten Region liegen und ihre Verbindungslinie BC in D halbirt ist, dann ist bd = cd, folglich

$$Ad = \frac{Ab + Ac}{2}, \text{ d. h. } u = \frac{x + x'}{2}$$

und $$Dd = \frac{Bb + Cc}{2}, \text{ d. h. } v = \frac{y + y'}{2}.$$

Um aber weiter zu zeigen, daß diese Gleichung auch dann noch richtig bleibt, wenn einer der beiden Punkte B und C oder wenn beide nicht in die erste, sondern in andere Regionen fallen, denken wir uns irgend einen Punkt E so gewählt, daß, wenn wir durch denselben zwei neue, den gegebenen parallele Axen ziehen, die Punkte B und C in die erste der durch diese Axen bestimmten Regionen fallen (was offenbar immer möglich und leicht auszuführen ist, wie auch die Punkte B und C liegen mögen). Nehmen wir nun die durch E gehenden Axen als erstes, die durch A gehenden Axen als zweites Axenpaar an, bezeichnen wir ferner mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$ die Coordinaten der fraglichen Punkte B und C und mit $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ die Coordinaten des Halbirungspunktes D für den ersten Anfangspunkt E und mit p und q die Coordinaten, durch welche die Lage des zweiten Anfangspunktes A gegen den ersten Anfangspunkt E festgestellt wird, dann ist zufolge des oben Erwiesenen

$$\mathfrak{u} = \frac{\mathfrak{x} + \mathfrak{x}'}{2} \text{ und } \mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{y} + \mathfrak{y}'}{2}.$$

Nach §. 10 ist aber

$$\mathfrak{u} = p + u, \quad \mathfrak{x} = p + x, \quad \mathfrak{x}' = p + x'$$

und $$\mathfrak{v} = q + v, \quad \mathfrak{y} = q + y, \quad \mathfrak{y}' = q + y'.$$

Setzen wir diese Werthe in die beiden vorhergehenden Gleichungen ein, so verwandeln sich dieselben in

$$u = \frac{x + x'}{2} \text{ und } v = \frac{y + y'}{2}.$$

Bemerkung. In den vorhergehenden §§. wurde nur die Lage des Anfangspunktes der Coordinaten verändert, während die Richtung der Axen dieselbe blieb. Die folgenden §§. behandeln die Umformung, welche die Coordinaten eines Punktes erfahren, wenn in der Richtung der Axen eine Aenderung eintritt.

Wenn dann weiterhin von dem Winkel die Rede ist, unter welchem eine Linie die Abscissenaxe schneidet, so ist allemal derjenige Winkel gemeint, um welchen diese Linie in dem Sinne des §. 3 von der Richtung des positiven Schenkels der Abscissenaxe abweicht.

*§. 14. Lehrsatz.

Wenn man den Pol unverändert beibehält, die Lage der Axe der Polarcoordinaten aber eine Aenderung erfährt, wenn ferner α den Winkel bezeichnet, um welchen die zweite Axe von der ersten abweicht, und φ und ψ die Abweichungswinkel (Anomalien) bedeuten, durch welche die Lage irgend eines Radius vector gegen die erste und gegen die zweite Axe festgestellt wird, so ist

$$\varphi = \alpha + \psi.$$

Der Beweis ist unter Berücksichtigung von §. 4 im wesentlichen der nämliche wie der des §. 8.

*§. 15. Lehrsatz.

Wenn ein rechtwinkliges und ein anderes, rechtwinkliges oder schiefwinkliges, Axensystem den nämlichen Anfangspunkt der Coordinaten haben, wenn ferner die Abscissen- und Ordinatenaxe des zweiten Systems von der Abscissenaxe des ersten Systems um die Winkel α und β abweichen und x, y die Coordinaten irgend eines Punktes für das erste, u, v aber die Coordinaten des nämlichen Punktes für das zweite Axensystem bezeichnen, so ist

$$x = u \cos \alpha + v \cos \beta$$

und

$$y = u \sin \alpha + v \sin \beta.$$

Beweis. Es seien in Fig. 9 AX und AY die Axen des ersten, AU und AV die Axen des zweiten Systems, also W. UAX $= \alpha$, VAX $= \beta$, ferner für den Punkt B AC = x, BC = y, AD = u und BD = v. Ziehen wir noch DE || AY und DF || AX, so ist in dem rechtwinklichen Dreiecke ADE

$$DE = AD \sin DAE = u \sin \alpha \text{ und } AE = AD \cos DAE = u \cos \alpha$$

und in dem rechtwinkligen Dreiecke BFD

$$BF = BD \sin BDF \text{ und } DF = BD \cos BDF,$$

oder da BD = v und W. BDF = VAZ = $180^0 - \beta$ ist:

$$BF = v \sin \beta \text{ und } DF = - v \cos \beta,$$

folglich $\quad x = AC = AE - DF = u \cos \alpha + v \cos \beta$

und $\quad y = BC = DE + BF = u \sin \alpha + v \sin \beta.$

Da Fig. 9 indeß nur einen einzelnen Fall darstellt, so kommt es noch darauf an, die Allgemeingiltigkeit der eben aufgeführten Gleichungen darzuthun. Wir gelangen hierzu durch folgende Ueberlegung: Bezeichnen wir überhaupt mit D denjenigen Punkt, in welchem eine durch den gegebenen Punkt, welcher B heißen soll, mit der Ordinatenaxe des zweiten Systems gezogene Parallele die Abscissenaxe des ersten Systems schneidet, so ist zufolge der Voraussetzung u die Abscisse des Punktes D. Sind ferner s, t die Coordinaten dieses Punktes für das erste Axensystem und r, φ die Polar-Coordinaten desselben für den Punkt A als Pol und AX als Axe, dann ist nach §. 5

$$1) \quad s = r \cos \varphi \text{ und } t = r \sin \varphi.$$

Nun liegt der Punkt D entweder im positiven oder im negativen Schenkel der Abscissenaxe AU des zweiten Systems. Im ersten Falle ist r = u und $\varphi = \alpha$, folglich

$$2) \quad s = u \cos \alpha \text{ und } t = u \sin \alpha.$$

Wenn aber der Punkt D in dem negativen Schenkel (z. B. in D′) liegen sollte, dann ist (r = AD′, aber u = — AD′, also) r = — u und $\varphi = 180^0 + \alpha$. Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (1) ein, so gehen dieselben auch jetzt in die Gleichung (2) über.

Denken wir uns nun weiter durch den Punkt D zwei rechtwinklige Axen parallel zu den Axen des ersten Systems gelegt, und bezeichnen wir mit w und z die Coordinaten des Punktes B für dieses neue Axensystem, so folgt ganz aus den nämlichen Gründen, welche wir so eben geltend gemacht haben,

$$3) \quad w = v \cos \beta \text{ und } z = v \sin \beta.$$

Nach unserer ursprünglichen Annahme sind x, y die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes B für den Anfangspunkt A; w, z sollten die Coordinaten

dieses Punktes für ein anderes System, dessen Axen denen des ersten parallel laufen, aber zum Anfangspunkte D haben, und s, t sollten die Coordinaten bedeuten, durch welche die Lage des Punktes D gegen den Punkt A bestimmt wird. Dann ist nach §. 10

$$x = s + w \text{ und } y = t + z,$$

also wenn wir die unter (2) und (3) erhaltenen Werthe einsetzen

$$x = u \cos \alpha + v \cos \beta \text{ und } y = u \sin \alpha + v \sin \beta.$$

*§. 16. Zusatz.

1) Wenn in der Umformung des vorherg. §. das zweite Axensystem ebenfalls ein rechtwinkliges ist, so ist $\beta = 90 + \alpha$, und die Gleichungen jenes §. verwandeln sich folglich in

$$x = u \cos \alpha - v \sin \alpha \text{ und } y = u \sin \alpha + v \cos \alpha.$$

2) Wenn die Abscissenaxe des zweiten Systems mit der des ersten zusammenfällt, also nur die Lage der Ordinatenaxe geändert wird, so ist $\alpha = 0$, und die Gleichungen des vorherg. §. gehen dann über in

$$x = u + v \cos \beta \text{ und } y = v \sin \beta.$$

*§. 17. Lehrsatz.

Wenn zwei (rechtwinklige oder schiefwinklige) Axensysteme den nämlichen Anfangspunkt der Coordinaten haben, die Ordinatenaxe des ersten Systems von der zugehörigen Abscissenaxe um den Winkel γ, die Abscissen- und die Ordinatenaxe des zweiten Systems aber von der Abscissenaxe des ersten Systems um die Winkel α und β abweichen, wenn ferner x, y die Coordinaten irgend eines Punktes für das erste und u, v die Coordinaten des nämlichen Punktes für das zweite Axensystem bezeichnen, so ist

$$x = \frac{u \sin(\gamma - \alpha) + v \sin(\gamma - \beta)}{\sin \gamma} \text{ und } y = \frac{u \sin \alpha + v \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Der Beweis für die Allgemeingiltigkeit dieser Gleichungen wird eben so geführt, wie in §. 15, mit dem einzigen Unterschiede, daß hier statt der beschränkten Formeln des §. 5 die allgemeinen des §. 6 in Anwendung kommen.

*§. 18. Zusatz.

Wenn nicht bloß die Richtung der Axen, wie im vorherg. §. angegeben, sondern auch die Lage des Anfangspunktes verändert wird und p, q die Coordinaten des Anfangspunktes des zweiten Systems für das erste System bezeichnen, alle anderen Buchstaben aber die im vorherg. §. angegebene Bedeutung behalten, so sind vermöge §. 10 die ganz allgemeinen, alle Fälle umfassenden Gleichungen für die Umformung der Coordinaten folgende

$$x = p + \frac{u \sin(\gamma - \alpha) + v \sin(\gamma - \beta)}{\sin \gamma}$$

und

$$y = q + \frac{u \sin \alpha + v \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Zweiter Abschnitt.

Von der Gleichung der geraden Linie.

§. 19. Erklärung.

Eine gerade oder krumme Linie heißt durch eine Gleichung zwischen Parallel- oder Polar-Coordinaten gegeben, wenn die Coordinaten eines jeden Punktes der Linie der Gleichung Genüge leisten, und wenn andererseits jeder Punkt, für welchen diese Bedingung erfüllt ist, der betreffenden Linie angehört.

Bemerkung. In Folgendem wird vorzugsweise von rechtwinkligen Coordinaten die Rede sein, und wenn nicht ausdrücklich schiefwinklige oder Polar-Coordinaten genannt sind, so sind allemal rechtwinklige gemeint, auch wenn dies nicht besonders erwähnt worden ist.

§. 20. Lehrsatz.

1) Wenn eine Linie BC, Fig. 10, der Ordinatenaxe parallel ist und die Ordinatenaxe in einem Punkte D schneidet, dessen Abscisse $= p$ ist, so ist die Gleichung dieser Linie

$$x = p^{*}).$$

2) Wenn eine Linie BC, Fig. 11, der Abscissenaxe parallel ist und die Ordinatenaxe in einem Punkte E schneidet, dessen Ordinate $= q$ ist, so kommt der Linie die Gleichung zu

$$y = q.$$

3) Wenn eine Linie BC, Fig. 12, durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht und von dem positiven Schenkel der Abscissenaxe AX um einen Winkel CAX abweicht, dessen trigonometrische Tangente $= m$ ist, so gehört der Linie die Gleichung zu

$$y = mx.$$

4) Wenn endlich die Linie BC, Fig. 13, die Ordinatenaxe in irgend einem Punkte H schneidet, dessen Ordinate $= q$ ist, und von der Abscissenaxe um einen Winkel abweicht, dessen trigonometrische Tangente $= m$ ist, so ist die Linie durch die Gleichung gegeben

$$y = mx + q.$$

Beweis. Die Behauptungen (1) und (2) sind an sich klar, da alle Punkte einer mit der Ordinatenaxe parallelen Linie die nämliche Abscisse und ebenso alle Punkte einer mit der Abscissenaxe parallelen Linie die nämliche Ordinate haben. Die Richtigkeit von (3) ergibt sich für den speciellen Fall, welchen Fig. 12 darstellt, aus dem rechtwinkligen Dreieck AGF, in welchem

$$FG = AG \operatorname{tang} FAG, \text{ d. h. } y = mx$$

*) Die Fig. 10 stellt nur einen speciellen Fall vor, während die aufgeführte Gleichung ganz allgemein Geltung hat. Aehnliches gilt von den Figuren 11, 12, 13 u. a. m., welche weniger zur Unterstützung des Beweises, als zur Veranschaulichung des Inhaltes des Satzes dienen sollen.

ist. Die Allgemeingiltigkeit dieser Gleichung aber folgt aus §. 5. Denn wenn wir mit φ den Winkel bezeichnen, um welche die in Rede stehende Linie von der Abscissenaxe abweicht, und x und y die Coordinaten irgend eines Punktes auf derselben sind, so ist nach dem angeführten §.

$$\text{tang}\ \varphi = \frac{y}{x},\ \text{d. h.}\ m = \frac{y}{x},\ \text{also}\ y = mx.$$

Um endlich die Richtigkeit der vierten Behauptung zu erweisen, denken wir uns den Anfangspunkt der Coordinate in den Punkt (H, Fig. 13) verlegt, in welchem die fragliche Linie (BC) die Ordinatenaxe schneidet, und bezeichnen die Ordinaten irgend eines Punktes jener Linie für diesen neuen Anfangspunkt mit y'; dann ist nach §. 9

$$y = y' + q$$

und nach Nr. 3

$$y' = mx,$$

folglich

$$y = mx + q.$$

Wir haben in den obigen Beweisen nur dargethan, daß sämmtliche Punkte einer bestimmten geraden Linie der betreffenden Gleichung entsprechen; es erübriget noch zu zeigen, daß dasselbe von keinem Punkte außerhalb dieser Linie gilt, was jedoch so leicht indirekt folgt, daß wir wohl nicht nöthig haben, hierauf besonders einzugehen.

§. 21. Zusatz.

1) Die Gleichung (4) des vorhergehenden §. schließt die Gleichung (2) und (3) als besondere Fälle ein, in welche sie übergeht, wenn man m oder q = o setzt; sie umfaßt überhaupt alle gerade Linien, welche die Ordinatenaxe schneiden, während die Gleichung (1) für diejenigen Linien gilt, welche der Ordinatenaxe parallel sind.

2) Da die Gleichungen (1) und (4) des vorhergehenden §. vom ersten Grade sind, und da diese Gleichungen alle Lagen umfassen, welche überhaupt eine gerade Linie in der Ebene haben kann, so folgt hieraus, daß die Gleichung einer geraden Linie zwischen rechtwinkligen Coordinaten allemal vom ersten Grade ist.

Bemerkung. Der folgende §. zeigt, daß die zuletzt aufgeführte Behauptung auch umgekehrt gilt.

§. 22, a. Lehrsatz.

Die allgemeine Gleichung vom ersten Grade zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y

$$Ax + By + C = 0$$

gehört allemal einer geraden Linie an, welche Werthe man auch den Coefficienten A, B, C beilegen mag.

Beweis. Ist zunächst der Coefficient B von y gleich Null, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$Ax + C = 0\ \text{oder}\ x = -\frac{C}{A},$$

und diese Gleichung geht in die Gleichung (1) des §. 20 über, wenn wir $-\frac{C}{A} = q$ setzen; sie gehört also einer der Ordinatenaxe parallelen Linie an.

Wenn dagegen B von Null verschieden ist, dann folgt aus der gegebenen Gleichung

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

und diese Gleichung fällt mit der Gleichung (4) des §. 20 zusammen, wenn wir $-\frac{A}{B} = m$ und $-\frac{C}{B} = q$ setzen; sie gehört also einer die Ordinatenaxe durchschneidenden Linie an.

Die Annahme, daß die Coefficienten A und B beide gleich Null sein sollten, würde gegen den Sinn des Satzes sein, indem dann die gegebene Gleichung weder x noch y enthielte.

*§. 22, b. Zusatz.

Da sich nach den Gleichungen des §. 17 rechtwinklige Coordinaten in schiefwinklige und umgekehrt umsetzen lassen, da ferner, wenn eine Gleichung zwischen rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten gegeben ist, durch diese Substitution der Grad dieser Gleichung nicht geändert wird, indem die Gleichungen des §. 17 vom ersten Grade sind, so folgt hieraus, daß auch für schiefwinklige Coordinaten die Gleichung einer geraden Linie allemal vom ersten Grade ist, und daß umgekehrt jede Gleichung vom ersten Grade einer geraden Linie angehört.

Um die durch eine Gleichung gegebene Linie in der Zeichnung darzustellen, verfährt man am bequemsten auf die Art, daß man die Coordinaten der Punkte bestimmt, in welchen dieselbe die Axen schneidet. Ist z. B. für eine Linie die Gleichung

$$3x - 4y + 18 = 0$$

gegeben, und bezeichnen wir die Abscisse des Punktes, in welchem diese Linie die Abscissenaxe schneidet, mit a, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung, welche ja auch für diesen Punkt gelten muß, dessen Abscisse $x = a$ und dessen Ordinate, da der fragliche Punkt in der Abscissenaxe liegen soll, $y = 0$ ist, wenn wir diese Werthe einsetzen, in

$$3a + 18 = 0,$$

woraus sich $a = -6$ ergibt. Bezeichnen wir ferner die Ordinate des Punktes, in welchem die zu ziehende Linie die Ordinatenaxe schneidet, mit b, so geht die gegebene Gleichung, indem wir $x = 0$ und $y = b$ setzen, über in

$$-4b + 18 = 0,$$

woraus $b = +4^1/_2$ hervorgeht. Wenn wir daher die negative Abscisse AG, Fig. 13, $= 6$ und die positive Ordinate $AH = 4^1/_2$ machen, so ist die durch G und H gezogene Linie die verlangte.

Bezeichnen wir überhaupt die Coordinaten der Punkte, in welchen eine durch die allgemeine Gleichung

$$Ax + By + C = 0$$

gegebene Linie die Abscissen- und Ordinatenaxe durchschneidet, mit a und b, so erhalten wir zur Bestimmung dieser Größen die Gleichungen

$$Aa + C = 0 \text{ und } Bb + C = 0,$$

also
$$a = -\frac{C}{A} \text{ und } b = -\frac{C}{B}.$$

Sind umgekehrt für eine gerade Linie die Coordinaten ihrer Einschnittspunkte in die Axen = a und b gegeben, so erhalten wir die Gleichung dieser Linie, wenn wir in der allgemeinen, alle geraden Linien umfassenden Gleichung

$$Ax + By + C = 0,$$

zufolge des Vorhergehenden $A = -\frac{C}{a}$ und $B = -\frac{C}{b}$ annehmen, wodurch dieselbe übergeht in

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0.$$

Dividiren wir diese Gleichung unter der Voraussetzung, daß C von Null verschieden ist, durch C, so können wir derselben die bequemere Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

geben. Ist also z. B. für die Linie BC, Fig. 13, $a = -AG = -6$ und $b = +AH = +4\frac{1}{2}$ gegeben, so lautet die Gleichung dieser Linie

$$-\frac{x}{6} + \frac{2y}{9} = 1$$

oder $$+3x - 4y + 18 = 0.$$

Ist in der allgemeinen Gleichung

$$Ax + By + C = 0$$

das letzte Glied $C = 0$, so ist auch $a = 0$ und $b = 0$, und die Linie, deren Gleichung nun $Ax + By = 0$, also $y = -\frac{A}{B}x$ lautet, geht, (wie auch schon in §. 20, 3) gezeigt ist, durch den Anfangspunkt.

§. 23. Aufgabe.

Die Gleichung einer geraden Linie aufzusuchen, welche durch einen gegebenen Punkt (a, b*) geht und mit der Abscissenaxe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente = m ist.

Aufl. Nach §. 20 muß die gesuchte Gleichung die Form haben

$$1)\ y = mx + q,$$

worin m bereits gegeben, aber q noch zu bestimmen ist. Da zufolge der Annahme die fragliche Linie durch den Punkt (a, b) gehen soll, so müssen auch die Werthe a und b für x und y gesetzt derselben genügen; es muß also

$$2)\ b = ma + q$$

sein. Subtrahiren wir diese Gleichung von der vorhergehenden, so ergibt sich

$$3)\ y - b = m(x - a)$$

als die gesuchte Gleichung der geraden Linie, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge thut.

Zur Veranschaulichung der so eben erhaltenen Gleichung kann Folgendes dienen: Es sei B, Fig. 13, der gegebene Punkt, $AD = a$, $BD = b$, ferner C ein beliebiger Punkt auf der in Rede stehenden geraden Linie, also $AE = x$, $CE = y$; dann ist, wenn wir $BF \parallel AX$ ziehen, $BF = x - a$, $CF = y - b$ und folglich in dem rechtwinkligen Dreieck BFC

$$y - b = (x - a) \tan CBF = m(x - a).$$

Die Figur stellt jedoch nur einen speciellen Fall dar, während die Ableitung des Haupttextes volle Allgemeingiltigkeit hat.

---

*) Wir nennen kurzweg denjenigen Punkt (a, b), dessen Abscisse = a und dessen Ordinate = b ist.

§. 24. Aufgabe.

Die Gleichung einer geraden Linie (EF, Fig. 14) zu suchen, welche durch einen gegebenen Punkt (P = a, b) geht und auf einer Linie BC senkrecht steht, welche mit der Abscissenaxe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente = m gegeben ist.

Aufl. Bezeichnen wir vorläufig mit m′ die trigonometrische Tangente des Winkels, um welchen die zu ziehende Linie von der Abscissenaxe abweicht, dann ist vermöge des vorhergehenden §. die gesuchte Gleichung

$$1)\ y - b = m'(x - a).$$

Nennen wir den Winkel (CBX), um welchen die gegebene Linie von der Abscissenaxe abweicht, φ, und hat φ' die nämliche Bedeutung für die gesuchte Linie, so ist zufolge der Annahme

$$\varphi' - \varphi = \pm 90^0,$$

daher $\cos(\varphi' - \varphi) = \cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi' = 0,$

also $1 + \text{tang}\,\varphi \,.\, \text{tang}\,\varphi' = 0,$

oder, da $\text{tang}\,\varphi = m$ und $\text{tang}\,\varphi' = m'$ ist,

$$1 + m \,.\, m' = 0$$

und folglich $m' = -\frac{1}{m}.$

Hiernach verwandelt sich die Gleichung (1) in

$$2)\ y - b = -\frac{1}{m}(x - a).$$

Durch die zuletzt erhaltene Gleichung werden wir auch leicht in den Stand gesetzt, die folgende Aufgabe zu lösen:

Den Abstand eines Punktes P, Fig. 14, dessen Coordinaten = a und b gegeben sind, von einer durch die Gleichung

$$1)\ y = x\,\text{tang}\,\alpha + q$$

gegebenen Linie BC zu finden.

Ziehen wir nämlich durch den Punkt P eine zu BC senkrechte Linie PF, so erhalten wir zufolge des Obigen für diese Linie die Gleichung

$$2)\ y - b = -(x - a)\,\text{cotg}\,\alpha.$$

Bezeichnen wir ferner die Coordinate des Punktes D, in welchem die gegebene Linie BC von der zu ihr senkrechten PF durchschnitten wird, mit x′ und y′, so ist nach §. 11

$$d = \sqrt{(x' - a)^2 + (y' - b)^2}.$$

Da der Punkt D sowohl auf der Linie BC, als auf PF liegt, so müssen für die Coordinaten desselben x′, y′ auch beide Gleichungen (1) und (2) Giltigkeit haben; durch Auflösung dieser Gleichungen erhalten wir

$$x' - a = -(a \sin\alpha - (b - q)\cos\alpha)\sin\alpha$$
$$y' - b = (a \sin\alpha - (b - q)\cos\alpha)\cos\alpha$$

und folglich $d = \pm(a \sin\alpha - (b - q)\cos\alpha)$
$$= \mp(b - (a\,\text{tang}\,\alpha + q))\cos\alpha,$$

wo das untere oder obere Vorzeichen Giltigkeit hat, je nachdem $b >$ oder $< a\,\text{tang}\,\alpha + q$ ist, da d jedenfalls eine positive Zahl vorstellt.

Wir haben in der vorstehenden Ableitung um größerer Deutlichkeit willen verschiedentlich auf Fig. 14 hingewiesen; die analytische Entwicklung selbst ist jedoch ganz unabhängig von der Figur geführt worden und hat daher allgemeine Giltigkeit, während Fig. 14 nur einen speciellen Fall vorstellt. Diesen zu Grunde legend würden wir die

Lösung der Aufgabe am einfachsten durch folgende Ueberlegung herbeiführen: Nach der Annahme ist AG = a, PG = b, AH = q und W. CBF = α, folglich, wenn wir noch HL || AX ziehen,

$$KG = KL + LG = a \tang \alpha + q,$$

also
$$PK = b - KG = b - (a \tang \alpha + q)$$

und
$$PD = PK \cos \alpha = (b - (a \tang \alpha + q)) \cos \alpha.$$

Wenn der gegebene Punkt mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfällt, also a und b = 0 sind, so erhalten wir für den gesuchten Abstand den einfacheren Ausdruck

$$d = \pm q \cos \alpha.$$

§. 25. Aufgabe.

Die Gleichung der geraden Linie zu suchen, welche durch zwei gegebene Punkte (a, b) und (c, d) geht.

Aufl. Bezeichnen wir mit m die trigonometrische Tangente des Winkels, um welchen die gesuchte Linie von der Abscissenaxe abweicht, so können wir nach §. 23 die Gleichungen aufstellen

$$1)\ y - b = m(x - a)$$

und
$$2)\ y - d = m(x - c).$$

Subtrahiren wir diese Gleichungen von einander, so erhalten wir

$$b - d = m(a - c), \text{ also } m = \frac{b - d}{a - c},$$

und wenn wir diesen Werth z. B. in die Gleichung (1) einsetzen, so ergibt sich

$$3)\ y - b = \frac{b - d}{a - c} \cdot (x - a),$$

oder in Proportion geschrieben:

$$y - b : b - d = x - a : a - c.$$

1. Sind B und C, Fig. 13, die beiden gegebenen Punkte, so haben wir für den ersteren die Abscisse AD = a, die Ordinate BD = b, für den letzteren die Abscisse AE = c, die Ordinate CE = d zu setzen. Nehmen wir dann auf der durch B und C gehenden Linie einen beliebigen Punkt P an, so werden wir in Uebereinstimmung mit dem Obigen die Abscisse AQ mit x, die Ordinate PQ mit y bezeichnen. Ziehen wir nun noch durch den Punkt B mit der Abscissenaxe AX eine Parallele, welche die Ordinaten CE und PQ in F und R schneidet, dann verhält sich

$$PR : CF = BR : BF$$

oder wenn wir die eben angegebenen Werthe verwenden,

$$y - b : d - b = x - a : c - a,$$

wofür wir, wie leicht zu sehen, auch schreiben können:

$$y - b : b - d = x - a : a - c.$$

2. Wenn mehrere Punkte, deren Coordinaten gegeben sind, verglichen werden sollen, so verfährt man zur bequemeren Uebersicht auf die Art, daß man die Coordinaten mit den Buchstaben x und y bezeichnet, welchen man eine Kennziffer beischreibt. Demgemäß bezeichnen wir die Coordinaten für einen gegebenen Punkt mit x_1, y_1, für einen zweiten gegebenen Punkt mit x_2, y_2 und für einen dritten mit x_3, y_3. Sollen diese drei Punkte in gerader Linie liegen, so muß zufolge des Vorstehenden sich verhalten

$$x_1 - x_2 : x_2 - x_3 = y_1 - y_2 : y_2 - y_3,$$

(indem wir nämlich in der Proportion der Anmerkung 1 $x = x_1$, $y = y_1$, $a = x_2$, $b = y_2$, $c = x_3$ und $d = y_3$ annehmen.)

§. 26. Zusatz.

In der Auflösung der Aufgabe des vorhergehenden §. haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die Abscissen a und c der beiden gegebenen Punkte verschiedene Werthe haben; sollte $a = c$ sein, so würde in der dort erhaltenen Gleichung der Nenner $a - c$ verschwinden, also diese Gleichung unbrauchbar werden. Die zu suchende Linie ist aber, wenn $a = c$ ist, offenbar der Ordinatenaxe parallel und ihre Gleichung folglich von der Form der Gleichung (1) des §. 20

$$x = p,$$

wo $p = a = c$ zu setzen ist.

§. 27. Aufgabe.

Es sind zwei gerade Linien durch die Gleichung

$$y = mx + q$$

und

$$y = m'x + q' \text{*)}$$

gegeben. Es sollen hieraus die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes berechnet werden.

Aufl. Sind x' und y' die Coordinaten des Durchschnittspunktes, so müssen dieselben, da dieser Punkt beiden geraden Linien angehört, sowohl der einen, als der anderen der obigen Gleichungen Genüge thun. Wir erhalten hiernach die Bestimmungsgleichungen

$$y' = mx' + q$$

und

$$y' = m'x' + q'.$$

Subtrahiren wir dieselben von einander, so ergibt sich zunächst

$$(m' - m)\,x' = q - q', \text{ also } x' = \frac{q - q'}{m' - m},$$

und dann weiter, wenn wir diesen Werth in eine der beiden obigen Gleichungen einsetzen,

$$y' = \frac{m'q - mq'}{m' - m}.$$

Wäre $m' = m$, so würde in den für x' und y' erhaltenen Werthen der Nenner verschwinden. Die durch die beiden obigen Gleichungen gegebenen Linien sind aber, wenn $m' = m$ ist, offenbar einander parallel, und es kann daher von einem Durchschnittspunkte derselben überhaupt nicht die Rede sein.

An das Vorhergehende reihen wir die Untersuchung an, unter welchen Bedingungen drei durch ihre Gleichungen gegebene Linien sich in einem Punkte durchschneiden; wir gehen hierbei von der allgemeinsten Form der Gleichung der geraden Linie

$$Ax + By + C = 0$$

aus. Nehmen wir zunächst an, daß C von 0 verschieden ist, also die Linie nicht durch den Anfangspunkt geht, so können wir diese Gleichung auch also schreiben:

$$-\frac{Ax}{C} - \frac{By}{C} = 1,$$

---

*) In der ersten Gleichung bedeuten x, y die Coordinaten irgend eines Punktes, welcher der durch diese Gleichung gegebenen Linie angehört; in der zweiten Gleichung bedeuten x, y die Coordinaten eines Punktes derjenigen Linie, welche durch die zweite Gleichung gegeben ist. Es haben daher in diesen Gleichungen x, y im allgemeinen nicht dieselben, sondern verschiedene Werthe.

oder wenn wir der Kürze wegen $-\frac{A}{C} = \alpha$, $-\frac{B}{C} = \beta$ setzen, so erhalten wir als allgemeine Form der Gleichung einer nicht durch den Anfangspunkt gehenden Linie

$$\alpha x + \beta y = 1,$$

wo zufolge der Anmerkung zu §. 22 α und β die Reciproken der Coordinaten der Punkte bezeichnen, in welchen diese Linie die Axen durchschneidet. Sind uns nun für die drei geraden Linien, von denen keine durch den Anfangspunkt geht und die sich sämmtlich in dem nämlichen Punkte durchschneiden, die drei Gleichungen

$$1)\ \alpha_1 x + \beta_1 y = 1,$$

$$2)\ \alpha_2 x + \beta_2 y = 1$$

und

$$3)\ \alpha_3 x + \beta_3 y = 1$$

gegeben, und nehmen wir an, daß x und y die Coordinaten des Durchschnittspunktes bezeichnen, also in allen drei Gleichungen die nämlichen Werthe haben, so ergibt sich aus denselben zunächst durch Subtraction

$$4)\ (\alpha_1 - \alpha_2)\,x = -(\beta_1 - \beta_2)\,y$$

$$5)\ (\alpha_2 - \alpha_3)\,x = -(\beta_2 - \beta_3)\,y$$

und hieraus dann weiter die Proportion

$$6)\ \alpha_1 - \alpha_2 : \alpha_2 - \alpha_3 = \beta_1 - \beta_2 : \beta_2 - \beta_3,$$

welche eine vollständige Analogie zu der in der Anmerkung zu §. 25 aufgeführten Proportion bildet.

Es erübrigt nun noch zu zeigen, daß, wenn diese Proportion Giltigkeit hat, drei durch die Gleichungen (1), (2), (3) ausgedrückte Linien sich nothwendig in einem Punkte durchschneiden. Denken wir uns zuvörderst, daß die durch (1) und (2) gegebenen Linien sich in einem Punkte schneiden, dessen Coordinaten wir mit x′ und y′ bezeichnen, und daß die durch die Gleichungen (2) und (3) gegebenen Linien sich in einem (andern) Punkte schneiden, dessen Coordinaten x″ und y″ sind, so erhalten wir durch Auflösung der Gleichungen (1) und (2)

$$7)\ x' = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2} \text{ und } y' = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}$$

und eben so durch Auflösung der Gleichungen (2) und (3)

$$8)\ x'' = \frac{\beta_2 - \beta_3}{\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3} \text{ und } y'' = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3}.$$

Findet nun die unter (6) aufgeführte Proportion

$$\alpha_1 - \alpha_2 : \alpha_2 - \alpha_3 = \beta_1 - \beta_2 : \beta_2 - \beta_3$$

statt, so verhält sich auch

$$y' : y'' = x' : x'',$$

und die beiden Durchschnittspunkte liegen folglich auf einer durch den Anfangspunkt gehenden Linie; da sie aber überdies auf der Linie (2) liegen, welche nach der Voraussetzung nicht durch den Anfangspunkt geht, so müssen sie nothwendig in einen Punkt zusammenfallen. Auch kann man sich leicht überzeugen, daß, wenn die Proportion (6) gegeben ist, die in den Gleichungen (7) und (8) für x′ und x″ und eben so die für y′ und y″ aufgeführten algebraischen Ausdrücke einander gleich werden. Diese Ausdrücke werden unendlich groß, wenn $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1$ oder $\alpha_2\beta_3 = \alpha_3\beta_2$ sein sollte; im ersten Falle sind die Linien (1) und (2), im andern die Linien (2) und (3) parallel und ihr Durchschnittspunkt rückt ins Unendliche hinaus. Eben so sind die Linien (1) und (3) parallel, wenn $\alpha_1\beta_3 = \alpha_3\beta_1$ ist.

Von den durch die Gleichungen (1), (2), (3) vorgestellten Linien kann keine durch den Anfangspunkt gehen. Sollte eine der gegebenen Linien durch den Anfangspunkt gehen, so hat nach §. 20, 3 die Gleichung derselben die Form

$$mx = y.$$

Sind nun für zwei andere nicht durch den Anfangspunkt gehende Linien die Gleichungen

$$\alpha_2 x + \beta_2 y = 1$$

und

$$\alpha_3 x + \beta_3 y = 1$$

gegeben, so erhalten wir als Bedingung, daß diese Linien die erste in dem nämlichen Punkte durchschneiden, die Gleichung

$$m = -\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\beta_2 - \beta_3}.$$

§. 28. Aufgabe.

Aus den Gleichungen zweier geraden Linien

$$y = mx + q$$

und

$$y = m'x + q'$$

den Winkel ω zu berechnen, unter welchem sich diese Linien schneiden.

Aufl. Bezeichnen wir die Winkel, um welche die gegebenen Linien von der Abscissenaxe abweichen, mit φ und φ', dann ist offenbar $\omega = \pm (\varphi - \varphi')$, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $\varphi >$ oder $< \varphi'$ ist. Lassen wir dieses Vorzeichen, da es sich nur um die absolute Größe des Winkels ω handelt, unberücksichtigt, so erhalten wir die Gleichung

$$\tang \omega = \tang (\varphi - \varphi') = \frac{\tang \varphi - \tang \varphi'}{1 + \tang \varphi \,.\, \tang \varphi'}$$

oder da zufolge §. 20 $\tang \varphi = m$ und $\tang \varphi' = m'$ ist,

$$\tang \omega = \frac{m - m'}{1 + m \,.\, m'}.$$

Dritter Abschnitt.

Von der Gleichung des Kreises.

§. 29. Lehrsatz.

Ist r der Radius eines Kreises, dessen Mittelpunkt in den Anfangspunkt A, Fig. 15, der rechtwinkligen Coordinaten fällt, so kommt dem Kreise die Gleichung zu

$$1)\quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Beweis. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus §. 5, da alle Punkte des Kreises vom Mittelpunkte gleichen Abstand haben.

§. 30. Zusatz.

Liegt der Mittelpunkt eines Kreises nicht im Anfangspunkte, sondern sind a und b die Coordinaten des Mittelpunktes M, Fig. 16, sind ferner x und y die Coordinaten irgend eines Punktes auf dem Kreise für den gegebenen Anfangspunkt A, ferner x' und y' die Coordinaten des nämlichen

Punktes, wenn wir nicht A, sondern M als Anfangspunkt annehmen, so ist nach §. 10 $x' = x - a$ und $y' = y - b$. Zufolge des vorherg. §. ist aber

$$x'^2 + y'^2 = r^2,$$

also wenn wir die so eben für x' und y' angegebenen Werthe einsetzen:

$$2)\quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

welches die allgemeine Gleichung des Kreises für rechtwinklige Coordinaten ist und die Gleichung (1) des vorherg. §. als einen speciellen Fall in sich schließt, der hervorgeht, wenn man a und b = 0 setzt.

§. 31. Zusatz.

Wenn der Kreis durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht und sein Mittelpunkt M, Fig. 17, in den positiven Schenkel der Abscissenaxe fällt, also $b = 0$ und $a = r$ ist, so verwandelt sich die Gleichung (2) des vorherg. §. in

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2,$$

also

$$3)\quad y^2 = 2rx - x^2 = x(2r - x).$$

Diese Gleichung, welche den bekannten geometrischen Lehrsatz ausspricht, daß die Ordinate y die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten x und $2r - x$ ist, in welche dieselbe den Durchmesser $AD = 2r$ theilt, wird die Scheitelgleichung des Kreises genannt, zum Unterschiede von der Gleichung (1) des §. 29, welche die Mittelpunktsgleichung heißt.

Wir übergehen die Gleichung des Kreises für schiefwinklige und Polarordinaten, da wir hiervon weiter unten bei der Ellipse, von welcher der Kreis nur ein specieller Fall ist, handeln werden.

§. 32. Erklärung.

Eine gerade Linie TG, Fig. 18, heißt eine Tangente eines Kreises (überhaupt eines Kegelschnittes), wenn sie mit demselben nur einen Punkt gemeinschaftlich hat und die krumme Linie (oder doch der mit der geraden Linie zusammentreffende Ast derselben) ganz an der nämlichen Seite der geraden Linie liegt*). Eine auf der Tangente TG im Berührungspunkte B errichtete Senkrechte BN wird Normale, das Stück ST der Abscissenaxe, welches zwischen die Ordinate BS und die Tangente BT fällt, wird Subtangente, und das Stück SN der Abscissenaxe, welches zwischen der Ordinate BS und der Normale BN liegt, Subnormale genannt.

§. 33, a. Aufgabe.

Aus den Coordinaten x und y eines Punktes auf einem Kreise, dessen Radius = r gegeben ist, und dessen Mittelpunkt in den Anfangspunkt fällt, die Subtangente, Subnormale und den Winkel φ zu berechnen, welchen die Tangente mit dem positiven Schenkel der Abscissenaxe bildet.

Aufl. Da die Tangente bekanntlich auf dem Radius senkrecht steht, folglich die Normale durch den Mittelpunkt geht, so ist die Subnormale SN, Fig. 19, gleich der Abscisse, also

$$1)\quad SN = x.$$

Dann ist in dem rechtwinkligen Dreiecke NBT

$$ST : SB = SB : SN,$$

*) In Betreff dieser Definition ist zu vergleichen unten §. 54, 79 u. 120.

also $$2)\quad ST = \frac{SB^2}{SN} = \frac{y^2}{x}.$$

Endlich ist in dem rechtwinkligen Dreiecke BST

$$\text{tang } BTS = \frac{BS}{ST} = y \cdot \frac{x}{y^2} = \frac{x}{y},$$

folglich $$\text{tang } \varphi = \text{tang } BTX = -\frac{x}{y}.$$

*§. 33, b. Aufgabe.

Aus den Coordinaten x_1, y_1 eines Punktes auf einem durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

gegebenen Kreise die Gleichung der durch diesen Punkt gehenden Tangente abzuleiten.

Aufl. Vermöge §. 23 lautet diese Gleichung

$$y - y_1 = (x - x_1) \text{ tang } \varphi,$$

oder wenn wir zufolge des vorherg. §. tang φ durch $\frac{-x_1}{y_1}$ ersetzen,

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Da der Berührungspunkt (x_1, y_1) auf dem Kreise liegt, so ist $x^2 + y^2 = r^2$, wonach die zuletzt erhaltene Gleichung übergeht in

$$xx_1 + yy_1 = r^2.$$

An das Vorhergehende reihen wir noch folgende Aufgaben an:

Aufg. 1. Aus der Gleichung eines Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2$$

und den Coordinaten a, b eines außerhalb des Kreises gegebenen Punktes die Coordinaten x_1, y_1 des Berührungspunktes einer aus jenem Punkte gezogenen Tangente zu berechnen.

Aufl. Da der Berührungspunkt auf dem Kreise liegt, so erhalten wir für denselben zunächst die Gleichung

$$1)\quad x_1^2 + y_1^2 = r^2.$$

In der vorhergehenden Aufgabe haben wir für die Tangente die Gleichung

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$

bekommen. Da die Tangente durch den Punkt (a, b) gehen soll, also ihre Gleichung auch für diesen Punkt Giltigkeit haben muß, so bekommen wir weiter die Gleichung

$$2)\quad ax_1 + by_1 = r^2.$$

Aus Auflösung der Gleichungen (1) und (2) ergibt sich

$$3)\quad x_1 = \frac{ar^2 \pm br\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}}{a^2 + b^2} \text{ und } y_1 = \frac{br^2 \mp ar\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}}{a^2 + b^2}.$$

Das doppelte Zeichen vor der Wurzel weist darauf hin, daß sich an einen Kreis durch einen außerhalb gegebenen Punkt allemal zwei Tangenten ziehen lassen. Diese doppelten Werthe von x_1 und y_1 fallen jedoch in einen zusammen, wenn $a^2 + b^2 = r^2$ ist, also der gegebene Punkt auf dem Kreise liegt, und sie werden imaginär, wenn $a^2 + b^2 < r^2$ und folglich der gegebene Punkt innerhalb des Kreises angenommen ist.

Wenn wir in die in der vorhergehenden Aufgabe abgeleitete Gleichung der Tangente

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$

die für den einen und den andern Berührungspunkt erhaltenen Werthe von x_1 und y_1 einsetzen, so ergeben sich uns für die beiden Tangenten nach einiger Umformung die Gleichungen

$$4)\quad r(ax + by - a^2 - b^2) + (bx - ay)\sqrt{a^2 + b^2 - r^2} = 0$$

und $$5)\quad r(ax + by - a^2 - b^2) - (bx - ay)\sqrt{a^2 + b^2 - r^2} = 0.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen mit einander, so erhalten wir weiter

$$r^2(ax + by - a^2 - b^2)^2 - (bx - ay)^2(a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

und nach einiger Reduction, da sich die ganze Gleichung durch den Factor $a^2 + b^2$ dividiren läßt,

$$6)\quad r^2((a - x)^2 + (b - y)^2) - (bx - ay)^2 = 0.$$

Diese Gleichung umfaßt alle auf einer der beiden Tangenten liegenden Punkte, da sie aus Multiplication der Gleichungen (4) und (5) hervorgegangen ist und ein Product offenbar verschwindet, wenn einer seiner Factoren gleich Null wird. Es müssen daher die Coordinaten eines jeden auf einer der beiden Tangenten liegenden Punktes der Gleichung (6) genügen, und umgekehrt muß ein Punkt, dessen Coordinaten dieser Gleichung Genüge leisten, auf einer der beiden Tangenten liegen, da ein Product nur dann verschwinden kann, wenn einer seiner Factoren gleich Null wird, also entweder der Gleichung (4) oder der Gleichung (5) Genüge geschieht. — Die Gleichung (6) repräsentirt also beide von dem gegebenen Punkte (a, b) ausgehenden Tangenten.

Uebrigens läßt sich derselben auch noch die folgende Form geben:

$$(ax + by - r^2)^2 - (a^2 + b^2 - r^2) . (x^2 + y^2 - r^2) = 0,$$

wie man sich leicht durch Entwicklung der in Klammern eingeschlossenen Ausdrücke überzeugen kann. Aus dieser letzteren Form erkennt man auf der Stelle, daß die Gleichung in die der vorhergehenden Aufgabe übergeht, wenn $a^2 + b^2 = r^2$ ist, also der gegebene Punkt auf dem Kreise liegt. Der Unterschied ist nur der, daß wir dort die Coordinaten des gegebenen Punktes mit x_1 und y_1 und hier mit a und b bezeichnet haben.

Aufg. 2. Aus der Gleichung eines Kreises

$$1)\quad x^2 + y^2 = r^2$$

und der Gleichung einer geraden Linie

$$2)\quad y = x \operatorname{tang} \alpha + q$$

die Coordinaten x_1 und y_1 der Punkte abzuleiten, in welchen die gerade Linie den Kreis durchschneidet.

Aufl. Multipliciren wir zunächst die Gleichung (2) mit $\cos \alpha$ und ersetzen der Kürze wegen $q \cos \alpha$ durch d, wo d nach der Anm. zu §. 24 den Abstand der geraden Linie vom Anfangspunkte bezeichnet, so erhalten wir für die Gleichung derselben die noch bequemere (und auch an sich merkenswerthe Form)

$$3)\quad y \cos \alpha - x \sin \alpha = d.$$

Da für die Coordinaten x_1, y_1 der Durchschnittspunkte des Kreises und der Gerade außer dieser Gleichung auch die Gleichung (1) gelten muß, so ergibt sich uns durch Auflösung dieser Gleichungen

$$4)\quad x_1 = - d \sin \alpha \pm \cos \alpha\sqrt{r^2 - d^2}$$

$$5)\quad y_1 = + d \cos \alpha \pm \sin \alpha\sqrt{r^2 - d^2}$$

Die doppelten Werthe von x_1 und y_1 weisen darauf hin, daß der Kreis und die Geraden sich im allgemeinen in zwei Punkten schneiden. Die beiden Durchschnittspunkte fallen in

einem zusammen, und die Gerade berührt den Kreis, wenn $d = r$ ist. Wir erhalten dann aus den Gleichungen (4) und (5) für die Coordinate des Berührungspunktes

$$x_1 = - d \sin \alpha \text{ und } y_1 = + d \cos \alpha,$$

folglich

$$\sin \alpha = - \frac{x_1}{d} \text{ und } \cos \alpha = \frac{y_1}{d}.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (3) ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$yy_1 + xx_1 = d^2,$$

oder da nach unserer Annahme $d = r$ ist,

$$xx_1 + yy_1 = r^2,$$

eine Gleichung, welche wir schon oben (1) als die der Tangente kennen gelernt haben.

Aufg. 3. Die Gleichung des Kreises abzuleiten, welcher durch drei Punkte geht, für welche die Coordinaten x_1 und y_1, ferner x_2 und y_2 und endlich x_3 und y_3 gegeben sind.

Aufl. Nach §. 30 hat die allgemeine Gleichung des Kreises die Form

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Da nun der Kreis durch die drei gegebenen Punkte gehen soll, so müssen auch die Coordinaten desselben dieser Gleichung genügen. Wir erhalten so zur Bestimmung von a, b und r die Gleichungen

$$1)\quad (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$
$$2)\quad (x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 = r^2$$
$$3)\quad (x_3 - a)^2 + (y_3 - b)^2 = r^2.$$

Subtrahiren wir Gleichung (2) von (1) und (3) von (2), so erhalten wir weiter

$$2a(x_1 - x_2) + 2b(y_1 - y_2) = x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2$$

und

$$2a(x_2 - x_3) + 2b(y_2 - y_3) = x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

Da diese Gleichungen in Beziehung auf a und b nur vom ersten Grade sind, so lassen sich diese Größen aus denselben ohne alle Schwierigkeit berechnen; wir verzichten aber eben deshalb und wegen der Weitläufigkeit der Rechnung auf die Ausführung derselben. Sind aber die Coordinaten a und b des Mittelpunktes gefunden, so ergibt sich dann der noch fehlende Radius r aus einer der drei ursprünglichen Gleichungen (1), (2) oder (3).

Statt der allgemeinen Durchführung der Rechnung wollen wir dieselbe für ein specielles Beispiel ausführen und als die durch ihre Coordinaten gegebenen Punkte die folgenden annehmen (5, 3), ferner (6, 2) und (12, 10); dann gehen die oben aufgeführten allgemeinen Gleichungen (1), (2), (3) in die folgenden besondern über

$$(5 - a)^2 + (3 - b)^2 = r^2,$$
$$(6 - a)^2 + (2 - b)^2 = r^2$$

und

$$(12 - a)^2 + (10 - b)^2 = r^2.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir weiter durch Subtraction

$$a - b = 3$$

und

$$3a + 4b = 51,$$

woraus sich zunächst $a = 9$, $b = 6$ und endlich $r = 5$ ergibt, so daß also die gesuchte Gleichung des durch die drei gegebenen Punkte gehenden Kreises folgende ist:

$$(x - 9)^2 + (y - 6)^2 = 25.$$

Vierter Abschnitt.

Von der Parabel.

A. Die Parabel als geometrischer Ort auf den Brennpunkt und die Directrix bezogen.

§. 34. Erklärung.

Der geometrische Ort eines Punktes B, Fig. 20, welcher gleichen Abstand von einer gegebenen Linie DJ und einem außerhalb derselben gegebenen Punkte F hat, wird eine Parabel genannt. Die gegebene Linie DJ heißt Directrix oder Leitlinie, der gegebene Punkt F Focus oder Brennpunkt und jede Linie BF, welche einen Punkt B auf der Parabel mit dem Brennpunkte F verbindet, Radius vector oder Brennstrahl. Eine durch den Brennpunkt F zur Directrix in senkrechter Richtung gezogene Linie DF wird die Axe und der Punkt A, in welchem sie die Parabel schneidet, der Scheitel genannt.

§. 35. Zusatz.

1) Der Scheitel der Parabel A, Fig. 20, halbirt den Abstand DF des Brennpunktes F von der Directrix DJ; denn da zufolge der vorstehenden Definition jeder Punkt der Parabel, also auch der Scheitel gleichen Abstand vom Brennpunkte und der Directrix hat, so muß derselbe nothwendig in den Halbirungspunkt der Linie DF fallen.

2) Aus dem nämlichen Grunde können überhaupt Punkte der Parabel erhalten werden, wenn man auf der Axe in einem beliebigen Punkte H ein Loth errichtet und mit dem Abstande HD dieses Punktes von der Directrix um den Brennpunkt F einen Kreis beschreibt. Die Punkte B und B′, in denen derselbe die Senkrechte schneidet, gehören der Parabel an.

3) Diese Construction läßt leicht erkennen, daß sich die Parabel zu beiden Seiten der Axe mit zwei Aesten, welche sich mehr und mehr von der Axe entfernen, ins unendliche erstreckt.

Man kann die unter (2) angegebene Construction zur praktischen Zeichnung der Parabel benutzen, indem man auf der Axe in beliebigen, aber nahe benachbarten Punkten Lothe errichtet und mit den Abständen derselben von der Directrix um den Brennpunkt Kreise beschreibt. Die Punkte, in welchen ein Loth von dem Kreise, der mit dem Abstande desselben von der Directrix beschrieben ist, geschnitten wird, sind Punkte der Parabel, welche man dann durch einen Zug aus freier Hand mit einander verbindet. Die Zeichnung fällt natürlich um so genauer aus, je weniger die auf der Axe errichteten Lothe von einander abstehen.

§. 36. Zusatz.

Wenn man durch den Brennpunkt F, Fig. 20, eine Sehne PP′ senkrecht zur Axe und durch die Endpunkte P und P′ mit der Axe die Parallelen PE und P′E′ zieht, so ist zufolge §. 34 $PF = PE = DF$ und $P'F = P'E' = DF$, also

$$PP' = 2DF.$$

Man pflegt die durch den Brennpunkt senkrecht zur Axe gezogene Sehne PP' den Parameter der Parabel zu nennen und mit 2p zu bezeichnen. Der Abstand DF des Brennpunktes von der Directrix ist folglich dem halben Parameter gleich, also = p, und der Abstand des Scheitels A vom Brennpunkte F, so wie auch von der Directrix DJ dem vierten Theile des Parameters gleich, also = $\frac{1}{2}$p.

§. 37. Lehrsatz.

1) Wenn ein Punkt C, Fig. 20, innerhalb der Parabel liegt, so ist seine Entfernung vom Brennpunkte kleiner, als der Abstand von der Directrix, CF < CK; wenn aber

2) ein Punkt C' außerhalb der Parabel liegt, so ist er weiter vom Brennpunkt, als von der Directrix entfernt, also

$$C'F > C'K.$$

Beweis. 1) Wenn wir den Punkt B, in welchem die zur Directrix Senkrechte CK die Parabel schneidet, mit dem Brennpunkte F verbinden, so ist in dem Dreiecke BCF

$$CF < BC + BF,$$

oder da BF = BK ist, da der Punkt B auf der Parabel liegt,

$$CF < BC + BK,$$

d. h. $$CF < CK.$$

2) Dagegen ist in dem Dreiecke BC'F

$$C'F + BC' > BF,$$

also da BF = BK = BC' + C'K ist,

$$C'F > C'K.$$

§. 38. Zusatz.

Aus der Umkehrung des vorherg. Lehrsatzes folgt sofort, daß ein Punkt innerhalb oder außerhalb der Parabel liegen muß, je nachdem sein Abstand vom Brennpunkte kleiner oder größer ist, als seine Entfernung von der Directrix.

§. 39. Lehrsatz.

Wenn eine Linie TG, Fig. 21, durch einen Punkt B auf der Parabel so gezogen ist, daß sie mit dem Brennstrahle BF und der Axe AF gleiche Winkel bildet, also W. FBT = FTB ist, so ist sie eine Tangente.

Beweis. Die Linie BT hat mit der Parabel nur den einen Punkt B gemeinschaftlich; jeder andere Punkt derselben, z. B. C liegt außerhalb der Parabel. Denn wenn wir C mit F verbinden, ferner BE und CK senkrecht auf die Directrix DJ ziehen und endlich noch C mit E verbinden, so ist $\triangle$ BCE $\cong$ BCF, (BC = BC, BE = BF und W. CBE = CBF, da W. EBT = FTB als Wechselwinkel und FBT = FBT vorausgesetzt ist;) folglich ist CE = CF, und da CE offenbar größer, als das Loth CK ist, auch

$$CF > CK.$$

Hierauf beruht die Eigenschaft parabolischer Spiegel, daß jeder mit der Axe AX, Fig. 21, parallel einfallende Strahl BS so zurückgeworfen wird, daß der zurückgeworfene Strahl BF die Axe AX im Brennpunkte F durchschneidet, indem W. GBS = EBT = FBT ist.

§. 40. Zusatz.

Durch das Vorhergehende werden wir leicht in den Stand gesetzt, durch einen auf der Parabel gegebenen Punkt B, Fig. 21, eine Tangente zu ziehen. Verbinden wir nämlich den gegebenen Punkt B mit dem Brennpunkte F und tragen auf der verlängerten Axe FT = BF auf, so ist, wenn wir BT ziehen, W. FBT = FTB, also BT die verlangte Tangente.

*§. 41. Zusatz.

Wie wir in §. 39 gezeigt haben, ist △ BCF ≌ BCE, Fig. 21, und folglich CF = CE. Wir können diesen Satz dahin aussprechen:

Jeder Punkt auf der Tangente BT hat gleichen Abstand von dem Brennpunkte F und dem Fußpunkte E des aus dem Berührungspunkte B auf die Directrix gefällten Lothes BE.

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich auch leicht an eine Parabel durch einen außerhalb gegebenen Punkt C, Fig. 22, eine Tangente ziehen. Zu diesem Zwecke verbinden wir den gegebenen Punkt C mit dem Berührungspunkte F und beschreiben mit der Linie CF um C einen Kreis, welcher die Directrix in dem Punkte E und E' durchschneidet. Ziehen wir dann durch diese Punkte die zur Axe AX parallelen Linien BE und B'E' und verbinden die Punkte B und B', in welchen dieselbe die Parabel schneidet, mit dem gegebenen Punkte C, so erhalten wir zwei durch einen Punkt gehende Tangenten der Parabel BC und B'C. Denn da △ BCF ≌ BCE (BC = BC, BF = BE, CF = CE), so ist W. CBF = CBE, also BC nach §. 39 eine Tangente. Ganz ähnlich ist der Beweis für die andere Tangente B'C zu führen.

*§. 42. Zusatz.

Wenn wir die Berührungspunkte B und B', Fig. 22, der aus dem Punkte C an die Parabel gezogenen Tangenten verbinden und durch C mit der Axe eine Parallele ziehen, welche die Verbindungslinie in H und die Directrix in K schneidet, so ist EK = E'K; folglich muß auch BH = B'H sein. Es ergibt sich hieraus der Satz: Die durch den Durchschnittspunkt zweier Tangenten mit der Axe gezogene Parallele halbirt die Sehne, welche die Berührungspunkte verbindet.

1. Dieser Satz bildet eine Analogie zu dem Kreissatze: Wenn man durch den Durchschnittspunkt zweier Tangenten einen Durchmesser zieht, so halbirt derselbe die Sehne, welche die Berührungspunkte verbindet.

2. Da in Fig. 22, wie leicht zu sehen, △ BCF ≌ BCE und △ B'CF ≌ B'CE' ist, so ist auch W. CFB = CEB und W. CFB' = CE'B', und da ferner zufolge des Vorhergehenden W. CEK = CE'K ist, so ergibt sich hieraus, daß auch W. CFB = CFB' ist. Dieser Satz lautet: Die Linie, welche den Durchschnittspunkt zweier Tangenten mit dem Brennpunkte verbindet, halbirt den Winkel, welchen die nach den Berührungspunkten gezogenen Brennstrahlen einschließen.

Beim Kreise wird durch die Linie, welche den Durchschnittspunkt der Tangenten mit dem Mittelpunkte verbindet, nicht bloß der Winkel, welchen die nach dem Berührungspunkte gezogenen Radien bilden, sondern auch der von den Tangenten selbst eingeschlossene Winkel halbirt, was jedoch bei der Parabel (im allgemeinen) keineswegs zutrifft. Vielmehr ist in Fig. 22 W. B'CO = B'CF (also BCF > B'CF). Denn zufolge des

oben Erwiesenen ist W. BFC = B'FC; nun ist aber W. BFC = 180° — (FH'C + FCH'), oder da W. FH'C = BH'O = 2BCH' ist,

$$1)\ BFC = 180^0 - (2BCH' + FCH').$$

Weiter ist W. B'FC = 180° — (CB'F + B'CF), wofür wir auch, da W. CB'F = B'QF = QFC + B'CF = FCH' + B'CF ist, setzen können

$$2)\ B'FC = 180^0 - (FCH' + 2B'CF).$$

Aus (1) und (2) aber ergibt sich

$$3)\ BCH' = B'CF$$

und hieraus

$$4)\ BCF = B'CH'.$$

Aus den beiden zuletzt erhaltenen Gleichungen geht der Satz hervor: Der Winkel, welchen die eine von zwei sich schneidenden Tangenten mit der Verbindungslinie zwischen ihrem Durchschnittspunkte und dem Brennpunkte bildet, ist gleich dem Winkel, welchen die andere Tangente mit dem Durchmesser (mit einer zur Axe parallelen Linie) bildet.

§. 43. Zusatz.

Wenn man aus einem beliebigen Punkte B, Fig. 23, einer Parabel auf die Directrix DJ eine Senkrechte BE ziehet und den Punkt E mit dem Brennpunkte F verbindet, ferner durch den Scheitel A eine Tangente AL ziehet, welche die Linie EF in C schneidet, und C mit B verbindet, so ist wegen AF = AD auch CF = CE und wegen BF = BE Winkel BCF = BCE = 90° und W. CBF = CBE. Die Linie BC ist folglich eine Tangente und senkrecht auf CF. Es folgt aber hieraus der Satz: Wenn man aus dem Brennpunkte einer Parabel auf beliebige an dieselbe gezogene Tangenten Lothe fällt, so liegen die Fußpunkte dieser Lothe auf einer geraden Linie, welche die Parabel im Scheitelpunkt berührt.

B. Die Gleichung der Parabel für rechtwinklige Axen.

§. 44. Lehrsatz.

Wenn wir den Scheitel der Parabel als Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten und die Axe der Parabel als positiven Schenkel der Abscissenaxe annehmen, ferner den Brennstrahl BF irgend eines Punktes B, Fig. 24, auf der Parabel mit r und die Abscisse AS dieses Punktes mit x bezeichnen, so ist

$$r = x + \frac{1}{2}p,$$

d. h. der Brennstrahl ist gleich der Summe aus der Abscisse und dem vierten Theile des Parameters.

Beweis. Wenn wir die Linie BE senkrecht zur Directrix DJ ziehen, so ist nach §. 34

$$BF = BE = DS = AS + AD,$$

also da nach §. 36 AD dem vierten Theile des Parameters PP', welchen wir oben mit 2p bezeichnet haben, gleich ist,

$$r = x + \frac{1}{2}p.$$

§. 45. Lehrsatz.

Unter der im vorherg. §. angegebenen Voraussetzung erhalten wir für die Parabel die Gleichung

$$y^2 = 2px.$$

Beweis. In dem rechtwinklichen Dreiecke BSF, Fig. 24, ist

$$BF^2 = BS^2 + FS^2.$$

Da nun nach dem vorherg. §. $BF = x + \frac{1}{2}p$, da ferner $BS = y$ und $FS = AS - AF = x - \frac{1}{2}p$ ist, so verwandelt sich die obige Gleichung, wenn wir diese Werthe einsetzen, in

$$\left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 = y^2 + \left(x - \frac{1}{2}p\right)^2,$$

woraus nach einiger Reduction hervorgeht

$$y^2 = 2px.$$

§. 46, a. Zusatz.

Wir haben für die Parabel die Gleichung

$$1) \quad y^2 = 2px$$

unter der Voraussetzung erhalten, daß erstens die Axe der Parabel mit dem positiven Schenkel der Abscissenaxe und zweitens der Scheitel der Parabel mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfällt. Wenn man die letztere Annahme beibehält, die erstere aber dahin abändert, daß die Axe der Parabel auf den negativen Schenkel der Abscissenaxe fällt, so erhält man durch eine der vorher angestellten ganz ähnliche Uebertragung für die Parabel die Gleichung $\quad 2) \quad y^2 = -2px.$

Wir werden uns jedoch in Folgendem auf die Erörterung der Gleichung (1) beschränken, da die Gleichung (2) für die Ordinate y ganz dieselben Werthe liefert, wenn man die Abscisse x negativ annimmt, welche die Gleichung (1) ergibt, wenn man x (absolut genommen eben so groß, aber) positiv annimmt.

§. 46, b. Zusatz.

Die Auflösung der Gleichung (1) des vorherg. §. ergibt das Resultat

$$y = \pm \sqrt{2px}$$

und hieraus folgt weiter:

1) Da für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, so geht die Curve durch den Anfangspunkt der Coordinaten.

2) Für jeden positiven Werth von x erhält y zwei an Größe gleiche, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Werthe; die Curve wird daher durch die Abscissenaxe in zwei symmetrische Hälften getheilt.

3) Je mehr x wächst, um so mehr nimmt auch y zu, und es gibt keine Grenze, über welche hinaus x und y nicht wachsen könnten. Die Curve läuft folglich zu beiden Seiten der Abscissenaxe in zwei unendlichen Aesten fort, welche sich immer mehr von dieser, so wie auch von der Ordinatenaxe entfernen.

4) Für negative Werthe von x wird y imaginär. Es kann daher kein Punkt der Curve auf der negativen Seite der Ordinatenaxe AY, Fig. 24, angetroffen werden.

§. 47. Zusatz.

Wenn wir in der Gleichung des §. 45

$$y^2 = 2px$$

$x = \frac{1}{2}p$ setzen, so ergibt sich $y = p$, d. h. (in Uebereinstimmung mit §. 36) die im Brennpunkte F, Fig. 24, errichtete Ordinate P ist dem halben Parameter DF und folglich die Sehne PP′ dem ganzen Parameter gleich. — Setzen wir ferner $x = 2p$, so wird auch $y = 2p$, d. h. wenn wir $AL = 2DF$, also $FL = 3AF$ annehmen, so ist die Ordinate KL der Abscisse AL gleich. Für alle Punkte zwischen dem Scheitel A und dem Punkte L ist dagegen die Ordinate größer und für alle jenseits des Punktes L auf der Parabel liegenden Punkte ist die Ordinate kleiner, als die Abscisse.

Wenn wir auf der Axe einen beliebigen Punkt annehmen und um denselben mit seinem Abstande vom Scheitel einen Kreis beschreiben, ferner den Radius dieses Kreises mit r und für irgend eine Abscisse x die zugehörige Ordinate des Kreises mit v bezeichnen, so erhalten wir nach §. 31 für den Kreis die Gleichung

$$v^2 = 2rx - x^2,$$

während wir für die Parabel die Gleichung

$$y^2 = 2px$$

haben. Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$\frac{v^2}{y^2} = \frac{2r - x}{2p}.$$

Wenn daher der Halbmesser r des Kreises kleiner, als der halbe Parameter p angenommen ist, so ist beständig $v < y$, und der Kreis liegt folglich ganz innerhalb der Parabel. Dies letztere ist auch noch der Fall, wenn $r = p$ ist. Ist aber $r > p$, so ist $v > y$, $v =$ oder $< y$, je nachdem $x < 2r - 2p$, $x =$ oder $> 2r - 2p$ ist; der Kreis liegt also theils außerhalb, theils innerhalb der Parabel und durchschneidet dieselbe in einem Punkte, dessen Abscisse dem Unterschiede zwischen dem Durchmesser des Kreises und dem Parameter der Parabel gleich ist. Von allen durch den Scheitel der Parabel gehenden Kreisen, deren Mittelpunkt auf die Axe fällt, schließt sich daher im Scheitel derjenige, dessen Durchmesser dem Parameter gleich ist, am innigsten an die Parabel an; es zeigt folglich dieser Kreis die **Krümmung** der Parabel im Scheitel an.

Wenn in Fig. 24 $AL = LK = LK' = 2p$ ist, so geht ein um L mit AL beschriebener Kreis durch die Punkte A, K und K′; er berührt die Parabel in A und schneidet sie in K und K′; zwischen A und K und zwischen A und K′ liegt der Kreis außerhalb, jenseits K und K′ innerhalb der Parabel.

*§. 48. Zusatz.

Da zufolge der Gleichung

$$y^2 = 2px$$

die Ordinate die mittlere Proportionale zwischen dem Parameter und der Abscisse ist, so ergibt sich für Punkte der Parabel auch folgende Construction. Ist A, Fig. 25, der Scheitel, F der Brennpunkt einer zu zeichnenden Parabel, so wird der zur Abscisse AS gehörende Punkt der Parabel erhalten, wenn man AS über den Punkt A verlängert, die Verlängerung $AT = AS$ macht und mit FT einen Kreis beschreibt. Der Durchschnittspunkt B dieses Kreises mit der in S errichteten Ordinate ist der gesuchte Parabelpunkt.

Denn wenn der um F mit BF beschriebene Kreis die verlängerte FS in N durchschneidet, so ist $FN = FB = FT = AF + AT = AF + AS = 2AF + FS$, folglich $SN = 2AF = p$, also BS die mittlere Proportionale zwischen $ST = 2x$ und $SN = p$.

Die angegebene Construction empfiehlt sich noch durch den Umstand, daß, wie leicht zu sehen, die Linien BT und BN die Tangente und Normale der Parabel für den Punkt B ergeben.

§. 49. Aufgabe.

Aus den Coordinaten x, y eines Punktes B, Fig. 25, die Subtangente ST, die Subnormale SN und den Winkel φ zu berechnen, welchen die Tangente BT mit der Abscissenaxe bildet.

Aufl. 1) Nach §. 39 und 44 ist $FT = FB = x + \frac{1}{2}p$, und da $FS = AS - AF = x - \frac{1}{2}p$ ist, so ist folglich

$$ST = SF + FT = x - \tfrac{1}{2}p + x + \tfrac{1}{2}p = 2x,$$

d. h. die Subtangente ist der doppelten Abscisse gleich.

2) In dem rechtwinkligen Dreieck TBN ist

$$SN = \frac{SB^2}{ST} = \frac{y^2}{2x} = \frac{2px}{2x} = p,$$

d. h. für jeden Punkt der Parabel ist die Subnormale dem Parameter gleich.

3) Da W. $SBN = BTS = \varphi$ ist, so erhalten wir aus dem Dreieck BSN die Gleichung

$$\tang \varphi = \frac{SN}{SB} = \frac{p}{y}.$$

Die unter (1) und (2) erwiesenen Sätze bieten ebenfalls sehr einfache Methoden dar, an einen gegebenen Punkt einer Parabel eine Tangente zu ziehen.

§. 50. Zusatz.

Aus der zuletzt erhaltenen Gleichung

$$\tang \varphi = \frac{p}{y}$$

ergibt sich, daß der Winkel, welchen die Tangente mit der Axe bildet, um so kleiner wird, je mehr die Ordinate wächst, je weiter sich also der gegebene Punkt von dem Scheitel entfernt, und daß folglich die beiden Aeste der Parabel (nicht ihre erhabene Seite, wie dies bei der Fig. 26 abgebildeten Curve der Fall ist, sondern) ihre hohle Seite gegen die Axe wenden.

Lassen wir in der obigen Gleichung y ins unendliche wachsen, so verschwindet $\tang \varphi$ und also auch W. φ, die unendlichen Aeste der Parabel nähern sich folglich immer mehr einer der Axe parallelen Richtung, während die Curve im Scheitelpunkte eine zur Axe senkrechte Richtung hat, da hier $y = 0$, folglich $\tang \varphi = \infty$, also W. $\varphi = 90^0$ ist.

*§. 51. Zusatz.

Bezeichnen wir mit x_1 und y_1 die Coordinaten des Berührungspunktes einer an die Parabel gezogenen Tangente, so hat nach §. 23 die Gleichung dieser Tangente die Form

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Da nun zufolge des vorhergehenden §.

$$m = \operatorname{tang} \varphi = \frac{p}{y_1}$$

ist, so erhalten wir als die gesuchte Gleichung der Tangente

$$1) \quad y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1),$$

wofür wir auch, da $y_1^2 = 2px_1$ ist, setzen können

$$2) \quad yy_1 = p(x + x_1).$$

Wir wollen die für die Tangente erhaltene Gleichung zur Auflösung der folgenden Aufgaben benutzen:

1) Die Coordinaten des Berührungspunktes einer Tangente zu berechnen, welche einer durch die Gleichung

$$y = mx + p$$

gegebenen Linie parallel ist.

Aufl. Wenn wir die Gleichung (2) in der Form

$$y = \frac{p}{y_1}x + \frac{px_1}{y_1}$$

schreiben, so muß in derselben, da die Tangente der gegebenen Linie parallel sein soll, der Coefficient von x gleich m, also

$$\frac{p}{y_1} = m$$

sein, woraus sich

$$y_1 = \frac{p}{m}$$

und vermöge der Gleichung $y_1^2 = 2px_1$

$$x_1 = \frac{p}{2m^2}$$

ergibt.

2) Aus den Coordinaten eines Punktes (a, b) die Coordinaten des Berührungspunktes einer durch diesen Punkt gehenden Tangente der Parabel zu berechnen.

Aufl. Da die Tangente durch den Punkt (a, b) gehen soll, so lautet für diesen speciellen Fall die allgemeine Gleichung derselben (Nr. 2 des Haupttextes)

$$by_1 = p(a + x_1).$$

Verknüpfen wir diese Gleichung mit der Gleichung

$$y_1^2 = 2px_1,$$

so ergibt sich

$$y_1 = b \pm \sqrt{b^2 - 2ap} \text{ u. } x_1 = \frac{y_1^2}{2p}.$$

Aus dem für y_1 erhaltenen Werthe folgt, daß $b^2 \geqq 2ap$ sein muß, wenn die Aufgabe überhaupt zu lösen sein soll. Wenn $b^2 < 2ap$ ist und folglich der gegebene Punkt innerhalb der Parabel liegt, so wird y_1 imaginär. Ist $b^2 = 2ap$, so liegt der gegebene Punkt auf der Parabel und er fällt mit dem Berührungspunkte zusammen, der dann $y_1 = b$ wird. Wenn aber $b^2 > 2ap$ ist, also der gegebene Punkt außerhalb der Parabel liegt, so liefert die obige Gleichung für y zwei reelle Werthe, und es lassen sich folglich durch jeden außerhalb der Parabel liegenden Punkt an dieselbe zwei Tangenten ziehen.

3) Die Coordinaten des Durchschnittspunktes zweier Tangenten zu berechnen, wenn die Coordinaten der Berührungspunkte $= x_1\ y_1$ und $x_2\ y_2$ gegeben sind.

Aufl. Wir erhielten oben in Nr. 2 für die durch den Berührungspunkt $x_1\ y_1$ gehende Tangente die Gleichung

$$yy^1 = p(x + x_1).$$

Dem analog lautet die Gleichung für die durch den Berührungspunkt $x_2\ y_2$ gehende Tangente

$$yy_2 = p(x + x_2).$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Durchschnittspunktes beider Tangenten einfach mit x und y, so bekommen wir durch Auflösung dieser Gleichungen

$$x = \frac{y_1\ y_2}{2p} \text{ und } y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Nach §. 13 ist $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ die Ordinate des Halbirungspunktes der zwischen den Punkten $x_1\ y_1$ und $x_2\ y_2$ gezogenen Sehne. Eine durch den Durchschnittspunkt zweier Tangenten mit der Axe gezogene Parallele geht folglich durch den Halbirungspunkt der die Berührungspunkte verbindenden Sehne, weil beide Punkte die nämliche Ordinate haben. (Vergl. oben §. 42.)

§. 52. Lehrsatz.

Wenn der Scheitel der Parabel in einen Punkt fällt, dessen Abscissen $= \alpha$ und β gegeben sind, und die Axe der Parabel mit dem positiven Schenkel der Abscissenaxe parallel läuft, so lautet die Gleichung der Parabel

$$(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha).$$

Der Beweis ist dem des §. 30 ganz ähnlich.

C. Die Durchmesser der Parabel.

*§. 53. Lehrsatz.

Die Mitten paralleler Sehnen der Parabel liegen in einer zur Axe parallelen geraden Linie.

Bew. Sind $x_1\ y_1$ die Coordinaten des einen, $x_2\ y_2$ die Coordinaten des andern Endpunktes einer Parabelsehne BB', Fig. 27, so erhalten wir zunächst, da beide Endpunkte B und B' auf der Parabel liegen, die Gleichungen

$$y_1^2 = 2px_1$$

und

$$y_2^2 = 2px_2,$$

woraus sich weiter ergibt

$$y_1^2 - y_2^2 = 2p(x_1 - x_2),$$

folglich

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p(x_1 - x_2)}{y_1 - y_2}.$$

Nach §. 13 ist $\frac{y_1 + y_2}{2}$ die Ordinate des Halbirungspunktes D der Sehne BB'; nennen wir diese Ordinate t, und bezeichnen wir ferner den Winkel, unter welchem die Sehne BB' die Axe durchschneidet, mit φ, so verwandelt sich die zuletzt erhaltene Gleichung, da nach §. 25 tang $\varphi = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ist, in

$$t = p \operatorname{cotg} \varphi.$$

Die Größe der Ordinate t des Halbirungspunktes einer Sehne in einer

gegebenen Parabel wird daher lediglich durch den Winkel ψ bestimmt, welchen die Sehne mit der Axe bildet, und hat folglich für alle parallelen Sehnen die nämliche Größe, da dieselben sämmtlich mit der Axe den nämlichen Winkel bilden. Die Mitten paralleler Sehnen liegen daher in einer zur Axe parallelen Linie.

*§. 54. Zusatz.

1) Da hiernach eine durch die Mitte D einer Sehne BB′, Fig. 27, zur Axe parallel gezogene Linie HK auch jede andere mit ihr parallel gezogezogene Sehne CC′ halbirt, so pflegt man eine jede der Axe der Parabel parallele Linie einen Durchmesser zu nennen.

2) In §. 42 haben wir gesehen, daß auch die durch die Endpunkte B und B′, Fig. 22, einer Sehne gezogenen Tangenten BC und B′C sich in dem verlängerten Durchmesser HL schneiden, welcher durch die Mitte H dieser Sehne geht.

3) Wenn wir durch den Punkt H, Fig. 27, in welchem der die Sehne BB′ halbirende Durchmesser die Parabel trifft, eine Tangente TG ziehen, so erhalten wir für den Winkel φ, welchen dieselbe mit der Axe bildet, da wir die Ordinate des Punktes D mit t bezeichnet haben, nach §. 49 die Gleichung

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{p}{t}.$$

Da wir nun im vorhergehenden §. ebenfalls

$$\text{tang}\,\psi = \frac{p}{t}$$

gefunden haben, wo ψ den Winkel bezeichnete, welchen die Sehne BB′ mit der Axe bildet, so ist folglich W. $\varphi = \psi$, also die durch den Endpunkt H des Durchmessers gezogene Tangente TG den von demselben halbirten Sehnen parallel.

4) Wenn wir uns die Sehne BB′ in der Art fortbewegt denken, daß der Halbirungspunkt D derselben sich mehr und mehr dem Punkte H nähert, während die Sehne unverändert die parallele Lage beibehält, so werden auch die Endpunkte B und B′ dem Punkte H immer näher rücken. Denken wir uns nun diese Punkte dem Punkte H unendlich nahe gebracht, so gibt offenbar die Verbindungslinie derselben die Richtung der Curve in dem Punkt H an. Da aber, wie wir gesehen haben, diese Linie mit der durch den Punkt H gehenden Tangente parallel ist, so zeigt die Tangente in der That die Richtung an, welche die Parabel im Berührungspunkte hat.

Das Vorhergehende liefert uns auch die Auflösungen für die folgenden Aufgaben:

Um an die Parabel eine Tangente zu ziehen, welche einer gegebenen Linie parallel ist, zieht man in der Parabel irgend zwei der gegebenen Linie parallele Sehnen BB′ und CC′, Fig. 27. Der Punkt H, in welchem der zugehörige Durchmesser die Parabel schneidet, ist der Berührungspunkt der gesuchten Tangente TG.

Um zu einer gezeichneten Parabel durch geometrische Construction den Scheitel und den Brennpunkt zu erhalten, zieht man in derselben irgend zwei parallele Sehnen BB′ und CC′, Fig. 27, durch die Mitten derselben den Durchmesser HK und senkrecht zu diesem die Sehne EE′. Zieht man dann durch die Mitte dieser Sehne mit HK die Parallele AX, so ist der Punkt A der gesuchte Scheitel, und

man erhält den noch fehlenden Brennpunkt F, wenn man durch den Punkt H eine Tangente TG (eine Parallele zu BB') zieht und W. THF = GHK macht.

D. Die Gleichung der Parabel für schiefwinklige Axen.

*§. 55. Aufgabe.

Die Gleichung der Parabel abzuleiten, wenn der positive Schenkel der Abscissenaxe mit einem Durchmesser und die Ordinatenaxe mit der Tangente des Punktes zusammenfällt, in welchem der Durchmesser die Parabel durchschneidet.

Aufl. Bezeichnen wir mit u und v die Coordinaten (HD und BD, Fig. 27) irgend eines Punktes (B) der Parabel für das vorgeschriebene Axensystem, ferner mit x' und y' die rechtwinkligen Coordinaten dieses Punktes für den nämlichen Anfangspunkt (H) und die nämliche Abscissenaxe (HK), endlich mit x und y die rechtwinkligen Coordinaten desselben Punktes, wenn der Scheitel (A) als Anfangspunkt und die Axe (AX) der Parabel als positiver Schenkel der Abscissenaxe angenommen wird, dann ist zunächst nach §. 16

$$x' = u + v \cos \beta \text{ und } y' = v \sin \beta,$$

wenn wir mit β den Winkel bezeichnen, unter welchem die neue Ordinatenaxe (GT) die Abscissenaxe (HK) durchschneidet. Bezeichnen wir nun noch mit s und t die rechtwinkligen Coordinaten des neuen Anfangspunktes (H) in Beziehung auf den Scheitel (A) als Anfangspunkt und die Axe der Parabel als positiven Schenkel der Abscissenaxe, so erhalten wir weiter nach §. 10 die Gleichungen

$$x = s + x' = s + u + v \cos \beta$$

und

$$y = t + y' = t + v \sin \beta.$$

Nun ist aber nach §. 54, 3 $t = p \operatorname{cotg} \beta$ und folglich, (da der Punkt H auf der Parabel liegt,) $s = \frac{t^2}{2p} = \frac{1}{2}p \operatorname{cotg} \beta^2$, wonach die zuletzt erhaltenen Gleichungen übergehen in

$$x = u + v \cos \beta + \tfrac{1}{2}p \operatorname{cotg} \beta^2 \text{ und } y = v \sin \beta + p \operatorname{cotg} \beta.$$

Setzen wir diese Werthe in die Scheitelgleichung der Parabel

$$y^2 = 2px,$$

so verwandelt sich dieselbe in

$$v^2 \sin \beta^2 + 2pv \cos \beta + p^2 \operatorname{cotg} \beta^2 = 2pu + 2pv \cos \beta + p^2 \operatorname{cotg} \beta^2,$$

also

$$v^2 = \frac{2pu}{\sin \beta^2},$$

oder wenn wir den Bruch $\frac{p}{\sin \beta^2} = p'$ setzen,

$$v^2 = 2p'u,$$

eine Gleichung für schiefwinklige Axen, welche mit der Scheitelgleichung der Parabel für rechtwinklige Axen ganz übereinstimmt.

1. Man pflegt den Factor 2p' in der zuletzt erhaltenen Gleichung den Parameter des Durchmessers zu nennen, auf welchen sich diese Gleichung als Axe bezieht.

Bezeichnen wir in Uebereinstimmung mit dem Nächstvorhergehenden die Abscisse des Punktes H, Fig. 27, für den Scheitel A als Anfangspunkt mit s, so ist nach §. 44

$$FH = \tfrac{1}{2}p + s.$$

Wir fanden oben $s = \frac{1}{2}p \cot g \beta^2$, woraus sich

$$FH = \frac{p}{2 \sin \beta^2} = \frac{1}{2}p'$$

ergibt, d. h. für jeden Durchmesser ist der Abstand seines Endpunktes vom Brennpunkte dem vierten Theile des zugehörigen Parameters (2p') gleich.

2. Die Gleichung

$$v^2 = 2p'u = \frac{2pu}{\sin \beta^2}$$

liefert das Resultat

$$v = \frac{\pm \sqrt{2pu}}{\sin \beta}$$

zufolge dessen die Ordinate v zwei reelle Werthe erhält oder verschwindet oder imaginär wird, je nachdem $u >$ oder $=$ oder < 0 ist. Da nun der Winkel β jede beliebige Größe haben kann, so ergibt sich hieraus, daß eine die Axe der Parabel oder deren Verlängerung schneidende Linie mit der Parabel nie mehr als zwei Punkte gemeinschaftlich haben kann.

Geben wir ferner in der Gleichung

$$y^2 = 2px$$

der Ordinate y einen bestimmten Werth, setzen wir z. B. $y = c$, so erhalten wir für die Abscisse den Werth

$$x = \frac{c^2}{2p}.$$

Jede mit der Axe parallele Linie durchschneidet daher die Parabel in **einem** Punkte.

*§. 56. Zusatz.

Wenn wir durch den Endpunkt B der Sehne BB' Fig. 28, die Tangente BT ziehen, welche die Verlängerung des zugehörigen Durchmessers SE in T schneidet, und in Uebereinstimmung mit §. 32 das Stück ST des Durchmessers, welches zwischen die Ordinate BS und die Tangente BT fällt, Subtangente nennen, so erhalten wir, wenn wir noch die senkrechte Ordinate $BC = y'$, ziehen, zur Berechnung dieser Subtangente die Gleichung

$$ST = CT - CS = y'(\cot g \gamma - \cot g \beta),$$

wo wir der Kürze wegen Winkel $BSC = \beta$ und W. $BTC = \gamma$ gesetzt haben. Nun ist nach §. 53 und 49

$$\cot g \beta = \frac{CD}{p} \text{ und } \cot g \gamma = \frac{BD}{p},$$

folglich

$$ST = \frac{y'}{p}(BD - CD) = \frac{y'^2}{p} = \frac{v^2 \sin \beta^2}{p},$$

wenn wir $BS = v$ setzen. Nach dem vorhergehenden §. ist aber $v^2 \sin \beta^2 = 2pu = 2p \cdot ES$, wonach die obige Gleichung übergeht in

$$ST = 2ES.$$

Es findet daher unter den angegebenen Voraussetzungen auch für schiefwinklige Coordinaten die Beziehung statt, daß die Subtangente der doppelten Abscisse gleich ist.

E. Die Gleichung der Parabel für Polar-Coordinaten.

§. 57. Aufgabe.

Die Gleichung der Parabel für Polarcoordinaten abzuleiten, wenn der Brennpunkt als Pol und die Axe der Parabel als Axe der Polarcoordinaten angenommen wird.

Aufl. Bezeichnen wir unter den angegebenen Voraussetzungen mit r und φ den Radius vector und die Anomalie für irgend einen Punkt B, Fig. 24, auf der Parabel und mit x die Abscisse dieses Punktes, wenn der Scheitel A als Anfangspunkt der Coordinaten angenommen wird, so ist nach §. 44 $BF = r = \frac{1}{2}p + x = \frac{1}{2}p + AS = p + FS$,
oder da $FS = r \cos \varphi$ ist,

$$r = p + r \cos \varphi,$$

woraus sich
$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$$
ergibt. — Lassen wir in dieser Gleichung die Anomalie φ von 0 bis 180^0 wachsen, so nimmt der Radius r von ∞ bis $\frac{1}{2}p$ ab, und wenn wir dann weiter die Anomalie von 180^0 bis 360^0 zunehmen lassen, so wächst der Radius r von $\frac{1}{2}p$ bis ∞.

§. 58. Zusatz.

Wenn die Brennpunkte und Axen zweier Parabeln zusammenfallen und dieselben von einem aus dem gemeinschaftlichen Brennpunkte F, Fig. 24, gezogenen Strahle in dem Punkte B und B' durchschnitten werden, wenn ferner R und r die zugehörigen Radien, φ aber die für beide gleiche Anomalie und P und p die Parameter der beiden Parabeln bezeichnen, so ist nach dem vorhergehenden §.

$$R = \frac{P}{1 - \cos \varphi} \text{ und } r = \frac{p}{1 - \cos \varphi},$$

folglich
$$R : r = P : p.$$
Strahlen, welche von dem gemeinschaftlichen Brennpunkte ausgehen, werden daher, welchen Winkel sie auch mit der Axe bilden, von den beiden Parabeln immer nach demselben Verhältnisse getheilt. Parabeln, welche verschiedene Parameter haben, sind folglich ähnliche Curven, welche sich, so wie Kreise, die mit verschiedenen Radien beschrieben sind, wohl in der Größe unterscheiden, aber in der Gestalt übereinstimmen.

F. Quadratur der Parabel.

*§. 59. Lehrsatz.

Das von der Parabelfläche durch eine zur Axe senkrechte Sehne abgeschnittene Segment BAC, Fig. 29, beträgt zwei Drittel des Rechtecks BCED, welches zur einen Seite die Sehne BC, zur andern das zwischen derselben und dem Scheitel liegende Stück der Axe AS hat.

Beweis. Wenn wir auf dem Parabelbogen AB zwei beliebige Punkte g und g' annehmen, durch dieselben mit den Seiten des Rechtecks BCED die

Parallelen gh = y, g′h′ = y′, gk = x, g′k′ = x′ ziehen und die beiden Punkte g und g′ durch eine gerade Linie verbinden, so erhalten wir zwei Trapeze, von denen das eine

$$ghh'g' = \frac{(x'-x)(y'+y)}{2},$$

das andere

$$gkk'g' = \frac{(x'+x)(y'-y)}{2}$$

ist. Es verhält sich daher

$$\frac{ghh'g'}{gkk'g'} = \frac{(x'-x)(y'+y)}{(x'+x)(y'-y)}.$$

Da die Punkte g und g′ auf der Parabel liegen, so ist

$$x = \frac{y^2}{2p} \text{ und } x' = \frac{y'^2}{2p}.$$

Wenn wir diesen Werth in die vorhergehende Gleichung einsetzen, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{ghh'g'}{gkk'g'} = \frac{(y'^2-y^2).(y'+y)}{(y'^2+y^2)\ (y'-y)} = \frac{(y'+y)^2}{y'^2+y^2}.$$

Je mehr wir den Punkt g′ dem Punkte g nähern, um so mehr nähert sich die Sehne gg′ dem Bogen und der vorstehende Bruch der Grenze $\frac{(2y)^2}{2y^2}$. Nehmen wir daher den Punkt g′ dem Punkte g unendlich nahe an, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{ghh'g'}{gkk'g'} = 2.$$

Denken wir uns nun den Bogen AB durch unendlich viele unendlich nahe Punkte in unendlich kleine Stücke getheilt und für jeden dieser unendlich kleinen Bogen die nämliche Construction wie für gg′ ausgeführt, so ist aus den eben angeführten Gründen der unendlich schmale innerhalb der Parabel liegende Streifen allemal doppelt so groß, als der außerhalb fallende. Es muß daher offenbar auch die ganze Fläche BAS doppelt so groß, als BAD sein. Demnach beträgt BAS zwei Drittel des Rechtecks BDAS und folglich das Segment BAC zwei Drittel des Rechtecks BDEC.

Man kann den so eben erwiesenen Satz auch dazu benutzen, um annähernd den Inhalt eines **Kreisabschnittes** BAC, Fig. 30, zu erhalten, wenn die Sehne BC mehrmals größer ist, als die Höhe AD, so daß sich ohne erheblichen Fehler der Kreisbogen BAC mit dem Parabelbogen BAC verwechseln läßt.

Der Näherungswerth, welchen man auf diese Art für den Kreisabschnitt erhält, ist jedoch etwas zu klein. Wenn man nämlich durch den Scheitel A einer Parabel und durch die Endpunkte einer zur Axe senkrechten Sehne BC einen Kreis beschreibt, welcher die Axe in E durchschneidet, so ist

$$1)\ BD^2 = 2pAD,$$

wenn wir den Parameter der Parabel mit 2p bezeichnen, und

$$2)\ BD^2 = AD\ .\ DE,$$

folglich DE = 2p. — Nehmen wir nun auf der Axe zwischen A und D einen beliebigen Punkt G an und bezeichnen wir die zugehörige Parabelordinate mit y und die Kreisordinate mit y′, so ist

$$y^2 = 2p \,.\, AG = AG \,.\, DE$$

und
$$y'^2 = AG \,.\, EG,$$

folglich $y' > y$, so lange $AG < AD$ ist. Der Kreisbogen BAC liegt also ganz außerhalb des Parabelbogens. (Ist aber $AG > AD$ und folglich $EG < ED$, so übertrifft die Ordinate der Parabel die Ordinate des Kreisbogens, und der Kreisbogen BEC liegt folglich ganz innerhalb der Parabel.)

Wenn wir uns noch eine zweite Parabel denken, welche A zum Scheitel, und den Durchmesser AE des durch A, B, C gehenden Kreises zum Parameter hat, wenn wir ferner die zu irgend einer Abscisse AG gehörige Ordinate dieser Parabel mit y'' bezeichnen, so ist

$$y''^2 = AG \,.\, AE.$$

Bei gleicher Abscisse ist folglich die Ordinate dieser Parabel beständig größer, als die Ordinate des Kreises.

Bezeichnen wir mit B' und C' die Punkte, in welchem diese Parabel die verlängerte Sehne BC schneidet, so ist

$$B'D = \sqrt{AD \,.\, AE}, \text{ also } B'C' = 2\sqrt{AD \,.\, AE}.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen $AD = a$ und $BC = b$, so ist

$$AE = \frac{AB^2}{AD} = \frac{a^2 + \frac{1}{4}b^2}{a} = \frac{4a^2 + b^2}{4a},$$

also
$$B'C' = \sqrt{4a^2 + b^2}.$$

Zufolge des oben erwiesenen Lehrsatzes ist der Inhalt des Parabelabschnitts ABC

$$= \tfrac{2}{3}AD \,.\, BC = \tfrac{2}{3}ab$$

und der Inhalt des Parabelabschnitts $AB'C'$

$$= \tfrac{2}{3}AD \,.\, B'C' = \tfrac{2}{3}a \,.\, \sqrt{4a^2 + b^2},$$

folglich ist der Inhalt des Kreisabschnittes ABC

$$> \tfrac{2}{3}ab, \text{ aber } < \tfrac{2}{3}ab\sqrt{1 + \frac{4a^2}{b^2}}.$$

Nun ist offenbar $\sqrt{1 + \frac{4a^2}{b^2}} < 1 + \frac{2a^2}{b^2}$, und der (verhältnißmäßige) Fehler, um welchen wir den Inhalt des Kreisabschnittes zu klein erhalten, beträgt daher, wenn wir denselben $= \frac{2}{3}ab$ setzen, jedenfalls weniger, als $2 \,.\, \left(\frac{a}{b}\right)^2$. Da der Inhalt des Kreisabschnittes zwischen den Grenzen $\frac{2}{3}ab$ und $\frac{2}{3}ab\left(1 + \frac{2a^2}{b^2}\right)$ liegt, so werden wir, wenn wir denselben

$$= \tfrac{2}{3}ab\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)$$

setzen, um weniger als $\frac{2}{3}ab \,.\, \frac{a^2}{b^2}$ irren, wobei jedoch unentschieden bleibt, ob der erhaltene Näherungswerth zu groß oder zu klein ist. Ist z. B. $a = 1'$, $b = 12'$ gegeben, so ergibt uns die zuletzt angeführte Formel für den gesuchten Inhalt den Werth $8\frac{1}{18}\square'$, welcher von der Wahrheit um weniger, als $\frac{1}{18}\square'$ abweicht.

*§. 60. Zusatz.

Durch eine der im vorhergehenden §. angewendeten ganz ähnliche Entwicklung läßt sich zeigen, daß das Segment, welches durch eine mit der Axe

schiefe Winkel bildende Sehne von der Parabelfläche abgeschnitten wird, zwei Drittel eines Parallelogramms beträgt, dessen Seiten der Sehne und dem durch dieselbe vom zugehörigen Durchmesser abgeschnittenen Stücke gleich sind und den nämlichen Winkel einschließen, welchen die Sehne mit dem Durchmesser bildet.

Fünfter Abschnitt.

Von der Ellipse.

A. Die Ellipse als geometrischer Ort auf die Brennpunkte bezogen.

§. 61. Erklärung.

Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen die Summe seiner Abstände von zwei festen Punkten beständig die nämliche Größe hat, wird eine Ellipse genannt. Die beiden festen Punkte F und F′, Fig. 31, heißen die Brennpunkte. Eine durch dieselben gezogene Linie AB, welche die Ellipse in A und B schneidet, wird die große Axe, der Punkt C, welcher in der Mitte zwischen den beiden Brennpunkten F und F′ liegt, der Mittelpunkt der Ellipse und eine durch diesen Punkt bis an die Ellipse gezogene Linie DE die kleine Axe genannt.

Im Folgenden werden wir die große Axe AB mit 2a, die kleine DE mit 2b, also da, wie leicht zu sehen, AB und DE in C halbirt sind, AC = BC mit a und CD = CE mit b, ferner den Abstand eines Brennpunktes vom Mittelpunkt, CF = CF′, welcher die lineare Excentricität genannt wird, mit c und endlich den Quotienten $\frac{c}{a}$, welcher die numerische Excentricität oder kurzweg die Excentricität der Ellipse heißt, mit e bezeichnen.

Eine Linie FG oder F′G, welche einen beliebigen Punkt G auf der Ellipse mit einem Brennpunkte verbindet, wird Radius vector oder Brennstrahl genannt. Im Folgenden soll der Radius FG mit r, der Radius F′G mit r′ bezeichnet werden.

Aus der Eigenschaft der Ellipse, daß für jeden Punkt derselben die Summe der Brennstrahlen die nämliche Größe hat, ergibt sich für das Praktische eine sehr bequeme Construction der Curve, welche wir als bekannt voraussetzen.

§. 62. Zusatz.

1) Ist A der eine, B der andere Endpunkt der großen Axe einer Ellipse, Fig. 31, so ist zufolge der vorstehenden Erklärung

$$AF + AF' = BF + BF',$$

d. h.

$$2AF + FF' = 2BF' + FF'$$

folglich

$$AF = BF' \text{ und } AF' = BF.$$

Nehmen wir ferner auf der Ellipse einen beliebigen Punkt G an, und bezeichnen wir die zu demselben gehörenden Brennstrahlen FG und F'G mit r und r', dann ist ebenfalls nach dem vorherg. §.

$$r + r' = AF + AF' = AF + BF = 2a,$$

d. h. für jeden Punkt der Ellipse ist die Summe der Brennstrahlen der großen Axe gleich.

2) Wenn wir den einen Endpunkt D der kleinen Axe mit den beiden Brennpunkten F und F' verbinden, so ist offenbar FD = F'D, also da nach Nr. 1 FD + F'D = 2a ist, FD = F'D = a. — Sind daher von einer Ellipse die beiden Axen AB und DE gegeben, so werden die Brennpunkte erhalten, wenn man um den einen Endpunkt D der halben kleinen Axe mit der halben großen Axe a einen Kreis beschreibt. Die Punkte F und F', in welchen dieser Kreis die große Axe AB durchschneidet, sind die gesuchten Brennpunkte.

3) In dem rechtwinkligen Dreiecke DCF ist

$$DF^2 = CD^2 + CF^2$$

oder

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Wenn daher von den drei Linien a, b und c zwei gegeben sind, so läßt sich nach dieser Gleichung die dritte finden.

4) In §. 61 haben wir den Quotienten

$$\frac{c}{a} = e$$

gesetzt, woraus sich

$$c = ae$$

ergibt. Setzen wir diesen Werth in die zuletzt erhaltene Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$a^2 = b^2 + a^2e^2$$

woraus weiter

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

hervorgeht. Diese Gleichung lehrt, die halbe kleine Axe b finden, wenn die halbe große Axe a und die (numerische) Excentricität e gegeben sind.

§. 63. Zusatz.

1) Zufolge der Gleichung des vorherg. §.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

ist nothwendig, so lange c von Null verschieden ist, $a > b$. Je kleiner c angenommen wird, d. h. je weniger die Brennpunkte vom Mittelpunkte abstehen, um so weniger ist b von a verschieden, und so mehr nähert sich die Ellipse einem Kreise; sie geht in den Kreis über wenn die beiden Brennpunkte in einen Punkt, den Mittelpunkt, zusammenfallen. Der Kreis ist also ein specieller Fall der Ellipse, welcher hervorgeht, wenn die lineare Excentricität c (und folglich auch die numerische Exentricität $e = \frac{c}{a}$) verschwindet.

2) Da c nothwendig $< a$ ist, so ist die (numerische) Exentricität $e = \frac{c}{a}$ allemal ein ächter Bruch. Je mehr dieser Bruch sich der Einheit nähert, um so kleiner wird die halbe kleine Axe

$$b = a\sqrt{1 - e^2},$$

und um so mehr nähert sich die Ellipse einer geraden Linie. Sie geht in diese über, wenn die Brennpunkte in die Endpunkte der großen Axe fallen und folglich $c = a$, also $e = 1$ und $b = 0$ ist.

Wenn man um einen der beiden Brennpunkte, F', Fig. 32, mit der großen Axe $2a$ einen Kreis beschreibt, so hat jeder Punkt der Ellipse von diesem Kreise, welcher der Richtkreis genannt wird, und von dem andern Brennpunkte F gleichen Abstand. Denn wenn wir z. B. den Punkt D mit den Brennpunkten F und F' verbinden und den Brennstrahl $F'D$ verlängern, bis er den Richtkreis in E schneidet, so ist

$$F'D + DE = 2a = F'D + FD,$$

folglich

$$DE = FD.$$

Insbesondere hat auch der Scheitel A von dem Punkte R, in welchem der Richtkreis die verlängerte Axe schneidet, und von dem Brennpunkte F gleichen Abstand. Es hat daher der Richtkreis für die Ellipse ganz dieselbe Bedeutung, wie die Richtlinie (Directrix) für die Parabel.

Wenn wir den einen Brennpunkt F, den Scheitel A und den Einschnittspunkt R des Richtkreises in die verlängerte Axe feststellen, den andern Brennpunkt F' aber immer weiter hinausrücken, so nähert sich der die Axe in R durchschneidende Bogen des Richtkreises mehr und mehr einer geraden Linie, und er geht in diese und folglich die Ellipse in eine Parabel über, wenn wir uns den zweiten Brennpunkt F' (und also auch den Mittelpunkt C) ins unendliche hinausgerückt denken. Wir können daher die Parabel als eine Ellipse ansehen, von welcher der Scheitel und der eine Brennpunkt einen gegebenen Abstand von einander haben, während der Mittelpunkt und der andere Brennpunkt von jenen um eine unendlich große Entfernung abstehen.

§. 64. Lehrsatz.

Wenn ein Punkt außerhalb oder innerhalb der Ellipse liegt, so ist im ersteren Falle die Summe seiner Abstände von den beiden Brennpunkten größer, im andern Falle aber kleiner, als die große Axe.

Beweis. Wenn wir den außerhalb der Ellipse liegenden Punkt H, Fig. 32, mit den Brennpunkten F und F' und den Punkt G, in welchem eine dieser Verbindungslinien die Ellipse schneidet, mit F' verbinden, so ist in dem Dreiecke $F'GH$ $\quad GH + F'H > F'G$,
also auch, wenn wir beiderseits FG addiren:

$$FH + F'H > FG + F'G,$$

d. h. da nach §. 62 $FG + F'G = 2a$ ist,

$$FH + F'H > 2a.$$

Wenn aber ein Punkt K innerhalb der Ellipse gegeben ist und wir verbinden denselben mit den Brennpunkten F und F', verlängern dann eine dieser Verbindungslinien FK, bis sie die Ellipse in G schneidet, und ziehen endlich nach $F'G$, so ist in dem entstandenen Dreieck $F'GK$

$$F'K < KG + F'G,$$

also auch wenn wir beiderseits FK addiren:

$$FK + F'K < FG + F'G$$

d. h.

$$FK + F'K < 2a.$$

§. 65. Zusatz.

Durch Umkehrung des eben erwiesenen Satzes ergibt sich in Verbindung mit §. 62 leicht weiter, daß ein Punkt auf der Ellipse oder außerhalb oder innerhalb derselben liegen muß, je nachdem die Summe seiner Abstände von dem Brennpunkte gleich der großen Axe oder größer oder kleiner ist.

§. 66. Lehrsatz.

Wenn eine Linie DE, Fig. 33, mit der Ellipse in einem Punkte G so zusammentrifft, daß sie mit den beiden Brennstrahlen FG und F′G gleiche Winkel bildet, so ist sie eine Tangente der Ellipse.

Beweis. Wenn wir auf der Linie DE einen beliebigen Punkt H annehmen, denselben mit den Brennpunkten F und F′ verbinden, ferner den Brennstrahl F′G um FG bis K verlängern und den Punkt K mit H verbinden, so ist $\triangle$ FGH $\cong$ KGH, (GH = GH, FG = KG nach der Constr., ferner nach der Voraussetzung W. FGH = F′GE = KGH). Demnach ist FH = KH.

Nun ist aber $F'H + KH > F'G + KG$,
also auch $F'H + FH > F'G + FG$,
d. h. $F'H + FH > 2a$;

folglich liegt der Punkt H außerhalb der Ellipse. Da nun dasselbe eben so von jedem anderen Punkte der Linie DE mit Ausnahme des Punktes G, in welchem sie nach der Annahme mit der Ellipse zusammentrifft, erwiesen werden kann, so ist folglich DE eine Tangente*).

1. Auf dem eben erwiesenen Satze beruht die Eigenschaft elliptischer Spiegel, daß die von einem Brennpunkte ausgehenden Strahlen nach dem andern Brennpunkte hin reflektirt werden.

2. Wenn man sich die Parabel als eine (halbe) Ellipse denkt, deren zweiter Brennpunkt in einem unendlichen Abstande vom Scheitel liegt, so ist der zu diesem Brennpunkte gehörige Brennstrahl der Axe parallel; es gilt daher zufolge §. 39 auch von der Parabel der Satz, daß die Tangente mit beiden Brennstrahlen gleiche Winkel bildet.

§. 67. Zusatz.

Zufolge des vorherg. §. wird durch einen auf der Ellipse gegebenen Punkt G, Fig. 33, eine Tangente gezogen, wenn man denselben mit den Brennpunkten F und F′ verbindet, einen der Brennstrahlen, z. B. F′G über den Punkt G beliebig bis K verlängert und den entstandenen Winkel FGK halbirt. Die Halbirungslinie DE ist die gesuchte Tangente.

*§. 68. Zusatz.

Soll durch einen außerhalb der Ellipse gegebenen Punkt H, Fig. 34, eine Tangente GH gezogen werden, so ist, wenn wir F′G um FG = GK verlängern, nach dem vorherg. §. HK = FH und F′K = 2a, woraus sich folgende Auflösung ergibt: Man verbinde den gegebenen Punkt H mit dem einen Brennpunkte F und beschreibe mit der Linie FH einen Kreis um H, welcher den um den andern Brennpunkt F′ mit der großen Axe 2a be-

*) Vergl. unten §. 79.

schriebenen Kreis (Richtkreis) in den Punkten K und K′ schneidet. Verbindet man nun noch diese Punkte mit dem Brennpunkte F′ und den Punkt H mit den Punkten G und G′, in welchen jene Verbindungslinien die Ellipse schneiden, so erhält man zwei vom Punkte H ausgehende Tangenten HG und HG′. Denn zufolge der angegebenen Construction ist FG = GK und FH = HK, folglich △ FGH ≌ KGH, daher W. FGH = KGH, also HG eine Tangente; ferner FH = HK′ und FG′ = G′K′, daher △ FG′H ≌ K′G′H und W. HG′F = HG′K′, also auch H′G′ eine Tangente.

Die um F′ und H beschriebenen Kreise aber müssen sich schneiden, da die Centrale F′H < FH + FF′, also um so mehr < FH + 2a, d. h. kleiner, als die Summe der Radien, aber größer, als die Differenz derselben ist, indem nach §. 64 FH + F′H > 2a, also F′H > 2a — FH ist.

Da F′K = F′K′ und HK = HK′, Fig. 34, ist, so ist △ F′HK ≌ F′HK′ und W. HF′G = HF′G′; eben so läßt sich zeigen, wenn wir den Richtkreis um F beschreiben, daß W. HFG = HFG′ ist. Es ergibt sich aber hieraus der Satz: Die Linie, welche einen Brennpunkt mit dem Durchschnittspunkt zweier Tangenten verbindet, halbirt den Winkel, welcher die nach den Berührungspunkten aus diesem Brennpunkte gezogenen Strahlen einschließen.

Setzen wir der Kürze wegen W. KHG = α, GHF′ = β, FHF′ = γ, FHG′ = G′HK′ = δ, so erhalten wir, da W. F′HK = F′HK′ und KHG = FHG erwiesen ist, die Gleichungen

$$\alpha + \beta = \gamma + 2\delta \text{ und } \alpha = \beta + \gamma,$$

woraus sich $\beta = \delta$, also W. F′HG = FHG′ und folglich auch F′HG′ = FHG ergibt. Diese Gleichungen liefern den Satz: Wenn man den Durchschnittspunkt zweier Tangenten mit den Brennpunkten verbindet, so ist der Winkel, welchen die eine Verbindungslinie mit der einen Tangente bildet, gleich dem Winkel, welchen die andere Verbindungslinie und die andere Tangente einschließt. — Beim Kreise fallen die beiden Brennpunkte im Mittelpunkte und also auch die beiden Verbindungslinien in eine Linie zusammen und diese bildet bekanntlich mit beiden Tangenten gleiche Winkel.

Eben so ergeben sich die oben §. 42, Anm. 2 über die Parabel erwiesenen Sätze als besondere Fälle der hier aufgeführten Sätze von der Ellipse, wenn man sich den einen Brennpunkt ins unendliche hinausgerückt und folglich die zu diesem gehörigen Brennstrahlen mit der Axe parallel denkt.

*§. 69. Zusatz.

Wenn man den Punkt F mit K, Fig. 33, verbindet, so wird die Verbindungslinie durch die Tangente HG im Durchschnittspunkte L halbirt und steht auf derselben senkrecht, wie leicht daraus hervorgeht, daß die Dreiecke FHK und FGK gleichschenklig sind. Verbindet man nun noch den Halbirungspunkt L der Linie FK mit dem Halbirungspunkte C der Linie FF′, so ist CL ∥ F′K und = $\frac{1}{2}$F′K = a. Hieraus ergibt sich der folgende Satz:

Die Fußpunkte der aus einem Brennpunkte (F) auf die Tangenten der Ellipse gefällten Lothe liegen auf einem um die große Axe als Durchmesser beschriebenen Kreise.

Man kann diesen Satz ebenfalls benutzen, um an die Ellipse durch einen auf derselben oder außerhalb gegebenen Punkt eine Tangente zu ziehen. Ist z. B. der Punkt H

gegeben, so wird der Punkt L als Durchschnittspunkt eines über FH beschriebenen Halbkreises und eines mit a um C beschriebenen Kreises erhalten.

Beim Kreise liegen die Fußpunkte der aus einem Brennpunkte, d. h. aus dem Mittelpunkte auf die Tangenten gefällten Lothe auf dem Kreise selbst. Bei der Parabel liegen dieselben (nach §. 43) auf einer geraden Linie, in welche der bei der Ellipse zu beschreibende Kreis übergeht, wenn man den Durchmesser, hier die Axe der Ellipse, unendlich groß annimmt.

B. Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse für rechtwinklige Axen.

§. 70. Lehrsatz.

Wenn man die große Axe der Ellipse als Abscissenaxe, die kleine als Ordinatenaxe, (also den Mittelpunkt der Ellipse als Anfangspunkt der Coordinaten annimmt,) ferner die Abscisse irgend eines Punktes G, Fig. 31, auf der Ellipse mit x und die zugehörigen Brennstrahlen mit r und r' bezeichnet, so lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$r = a + ex \text{ und } r' = a - ex.$$

Beweis. Wenn man in dem Dreiecke FGF' die Höhe GH zieht, so

ist $$FG^2 = FH^2 + GH^2 \text{ und } F'G^2 = F'H^2 + GH^2,$$

folglich $$FG^2 - F'G^2 = FH^2 - F'H^2,$$

wofür wir auch setzen können

$$(FG + F'G) . (FG - F'G) = (FH + F'H) . (FH - F'H)$$

d. h. $$2a . (r - r') = 2c . 2CH = 2c . 2x,$$

also $$r - r' = \frac{2cx}{a} = 2ex \text{ (§. 61).}$$

Verbinden wir hiermit die Gleichung

$$r + r' = 2a,$$

so ergibt sich $$r = a + ex$$

und $$r' = a - ex.$$

§. 71. Lehrsatz.

Unter den im vorherg. §. angegebenen Voraussetzungen gilt für jeden Punkt der Ellipse die Gleichung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

welche die Mittelpunktsgleichung der Ellipse genannt wird.

Beweis. In Fig. 31 ist

$$FG^2 = GH^2 + (CF' - CH)^2,$$

also $$r'^2 = y^2 + (c - x)^2 \text{ *)}.$$

Nach dem vorherg. §. und §. 61 ist $r' = a - ex$ und $c = ae$, wonach sich die vorstehende Gleichung verwandelt in

$$(a - ex)^2 = y^2 + (ae - x)^2$$

oder $$a^2 - 2aex + e^2x^2 = y^2 + a^2e^2 - 2aex + x^2$$

oder $$y^2 + x^2(1 - e^2) = a^2(1 - e^2).$$

Nach §. 62 ist $a^2(1 - e^2) = b^2$, also $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$. Setzen wir diesen

*) Die Figur stellt nur einen speciellen Fall dar; ganz allgemein folgt die Richtigkeit der aufgeführten Gleichung aus §. 11.

Werth in die vorherg. Gleichung ein, so erhalten wir

$$y^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} = b^2,$$

also

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

§. 72. Zusatz.

Aus der so eben erhaltenen Gleichung ergibt sich

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Diese Gleichung lehrt, daß die Ordinate y abnimmt, wenn die Abscisse x wächst. Die Ordinate wird am kleinsten, nämlich $= 0$, wenn $x = \pm a$ ist, und die Ordinate wird (abgesehen vom Vorzeichen) am größten, nämlich $= \pm b$, wenn $x = 0$ ist.

Weiter folgt aus der Gleichung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

daß die Curve so wohl durch die Abscissenaxe, als auch die Ordinatenaxe symmetrisch getheilt wird, da für jeden Werth von x die Ordinate y zwei an Größe gleiche, aber den Vorzeichen nach entgegengesetzte Werthe erhält und eben so für jeden Werth von y sich aus obiger Gleichung für die Abscisse x zwei gleich große, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Werthe ergeben.

§. 73. Zusatz.

1) Ist $b = a$, so geht die Ellipse in den Kreis und die Gleichung des §. 71 in die Gleichung des Kreises

$$y^2 + x^2 = a^2$$

über, wenn nämlich der Radius des Kreises mit a bezeichnet wird.

2) Beschreiben wir über der großen Axe der Ellipse einen Halbkreis, und bezeichnen wir die zu irgend einer Abscisse $CH = x$, Fig. 35, gehörigen Ordinaten der Ellipse und des Kreises GH und KH mit y und v, so ist

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

und

$$v = \sqrt{a^2 - x^2},$$

folglich

$$y : v = b : a = CD : CL,$$

d. h. die Ordinate der Ellipse verhält sich zur Ordinate des Kreises wie die halbe kleine Axe der Ellipse zur halben großen Axe. Da nun dieses Verhältniß zwischen den beiden Ordinaten für jede Abscisse beständig das nämliche bleibt, so muß auch offenbar zwischen der Fläche der Ellipse und der Fläche des Kreises dasselbe Verhältniß stattfinden, also wenn wir jene mit E, diese mit K bezeichnen, sich

$$E : K = b : a$$

verhalten, woraus sich, da K bekanntlich $= a^2\pi$ ist,

$$E = ab\pi$$

ergibt. Der Flächeninhalt einer Ellipse ist daher eben so leicht, als der des Kreises zu berechnen.

Die vorstehende Gleichung lautet in Worten: Die Ellipse ist einem Kreise gleich, welcher die mittlere Proportionale zwischen beiden Axen zum Durchmesser hat.

3) Aus der obigen Proportion

$$y : v = b : a$$

ergibt sich für die Ellipse auch folgende Construction: Wenn man in einem Kreise beliebige Ordinaten zieht und dieselben nach einem gleichen Verhältnisse theilt, so liegen die Theilungspunkte sämmtlich auf einer Ellipse.

*§. 74. Lehrsatz.

Sind x und y die Coordinaten eines innerhalb oder außerhalb der Ellipse liegenden Punktes, so ist im ersteren Falle

$$a^2y^2 + b^2x^2 < a^2b^2,$$

im andern Falle aber

$$a^2y^2 + b^2x^2 > a^2b^2.$$

Beweis. Wenn wir den gegebenen Punkt mit dem Mittelpunkte verbinden und die Coordinaten des Punktes, in welchem diese Linie entweder unmittelbar oder über den gegebenen Punkt verlängert die Ellipse schneidet, mit x' und y' bezeichnen, so ist nach §. 71

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2.$$

Nun ist aber offenbar für den innerhalb liegenden Punkt (abgesehen vom Vorzeichen) $x < x'$ und $y < y'$ und für den außerhalb liegenden Punkt $x > x'$ und $y > y'$, woraus sofort die Richtigkeit der aufgestellten Behauptungen hervorgeht.

§. 75. Aufgabe.

Aus den Coordinaten x, y eines Punktes G, Fig. 36, auf der Ellipse die Subtangente ST, die Subnormale SN und den Winkel $MTG = \varphi$ zu berechnen, welchen die Tangente mit (der positiven Richtung) der Abscissenaxe bildet.

Aufl. Da zufolge §. 66 die Tangente TG mit den beiden Radien FG und F'G gleiche Winkel bildet und folglich der von den Radien eingeschlossene Winkel FGF' durch die Normale NG halbirt wird, so verhält sich

$$FN : F'N = FG : F'G,$$

also auch $FN - F'N : FN + F'N = FG - F'G : FG + F'G$.

Nun ist aber, wie leicht zu sehen, $FN - F'N = 2CN$, $FN + F'N = FF' = 2c = 2ae$, $FG - F'G = r - r' = 2ex$ (§. 70) und $FG + F'G = 2a$. Setzen wir diese Werthe in die vorherg. Proportion ein, so verwandelt sich dieselbe in $2CN : 2ae = 2ex : 2a$,

woraus sich zunächst ergibt $CN = e^2x$

und dann weiter $SN = CS - CN = x - e^2x = x(1 - e^2)$,

oder da nach §. 62 $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$ ist,

$$1)\quad SN = \frac{b^2x}{a^2}.$$

Mit Hilfe der Subnormale SN erhalten wir nun leicht auch die Subtangente ST vermöge der Proportion

$$ST : SG = SG : SN,$$

also

$$ST = \frac{SG^2}{SN},$$

oder da $SG^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x)^2$ und $SN = \frac{b^2}{a^2}x$ ist:

$$2)\quad ST = \frac{a^2 - x^2}{x}.$$

Endlich erhalten wir den Nebenwinkel STG des Winkels φ, welchen wir mit ψ bezeichnen wollen, aus dem rechtwinkligen Dreiecke GSN, in welchem Winkel NGS = GTS = ψ ist, durch die Gleichung

$$\tang \psi = \frac{SN}{SG} = \frac{b^2x}{a^2y},$$

und folglich

$$3)\quad \tang \varphi = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

§. 76. Zusatz.

Aus der Gleichung des vorherg. §.

$$\tang \psi = \frac{b^2x}{a^2y}$$

folgt, daß der Winkel ψ (für Punkte der Ellipse, welche in der ersten Region liegen) wächst, wenn die Abscisse x zu= und folglich die Ordinate y abnimmt. Es ergibt sich aber hieraus das wichtige Resultat, daß die Curve ihre hohle Seite gegen die Abscissenaxe wendet. — (Die in §. 35 aus der Gleichung der Ellipse gezogenen Folgerungen würden auch sämmtlich noch gelten können, wenn die Curve die in Fig. 37 abgebildete Gestalt hätte.) —

Für $x = 0$ wird zufolge der obigen Gleichung $\tang \psi$ und also auch der Winkel ψ selbst $= 0$, d. h. die Curve hat in den Endpunkten der kleinen Axe eine der Abscissenaxe parallele Richtung. Für $x = \pm a$ wird $y = 0$, also $\tang \varphi = \infty$ und folglich $\varphi = 90^0$, d. h. in den Endpunkten der großen Axe ist die Richtung der Curve zur Abscissenaxe senkrecht.

*§. 77. Zusatz.

Bezeichnen wir mit x_1 und y_1 die Coordinaten eines Punktes auf der Ellipse, so erhalten wir nach §. 23 für eine durch diesen Punkt gehende Gerade die Gleichung

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Soll die gerade Linie die Ellipse in dem gegebenen Punkt berühren, so muß

$$m = \tang \varphi = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

sein. Wir erhalten so für die Tangente des Punktes x', y' die Gleichung

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1),$$

oder nach einiger Reduction, da nach §. 71 $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$ ist:

$$a^2y_1y + b^2x_1x = a^2b^2.$$

Durch die für die Tangente erhaltene Gleichung werden wir in den Stand gesetzt, die folgende Aufgabe zu lösen.

1) Die Coordinaten des Berührungspunktes einer Tangente zu finden, welche einer Linie parallel ist, deren Gleichung lautet

$$y = mx + q.$$

Aufl. Da mit dieser Linie die Tangente, deren zuletzt aufgeführte Gleichung wir auch in der folgenden Form schreiben können:

$$y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\cdot x + \frac{b^2}{y_1},$$

parallel sein soll, so folgt zunächst hieraus

$$\frac{b^2x_1}{a^2y_1} = -m.$$

Da ferner der Berührungspunkt, dessen Coordinaten wir mit x_1, y_1 bezeichnet haben, auf der Ellipse liegt, so erhalten wir weiter die Gleichung

$$a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$x_1 = \frac{\pm a^2m}{\sqrt{(a^2m^2+b^2)}} \text{ und } y_1 = \mp \frac{b^2}{\sqrt{(a^2m^2+b^2)}}.$$

Es existiren daher allemal zwei der gegebenen Linie und unter sich parallele Tangenten, und ihre Berührungspunkte liegen auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Linie; dieselben fallen in die zweite und vierte Region, wenn m positiv, in die erste und dritte, wenn m negativ ist.

2) Aus den Coordinaten c, d eines gegebenen Punktes die Coordinaten x_1, y_1 des Berührungspunktes der durch denselben an die Ellipse gezogene Tangente zu berechnen.

Aufl. Da die Tangente durch den gegebenen Punkt (c, d) gehen soll, so muß auch die Gleichung derselben für ihn gelten, also

$$a^2y_1d + b^2x_1c = a^2b^2$$

und weiter muß

$$a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2$$

sein, da der Berührungspunkt (x_1, y_1) auf der Ellipse liegt. Durch Auflösung dieser beiden Gleichungen finden wir

$$x_1 = \frac{a^2(b^2c \pm d\sqrt{N - a^2b^2})}{N}$$

und

$$y_1 = \frac{b^2(a^2d \mp c\sqrt{N - a^2b^2})}{N},$$

wo der Kürze wegen $a^2d^2 + b^2c^2 = N$ gesetzt ist.

Ist $N > a^2b^2$, liegt also der gegebene Punkt zufolge §. 74 außerhalb der Ellipse, so erhalten wir sowohl für x_1 als auch für y_1 zwei reelle Werthe; es lassen sich daher durch einen außerhalb der Ellipse gegebenen Punkt allemal zwei Tangenten an dieselbe ziehen. Dieselben fallen in einen zusammen, wenn $N = a^2b^2$ ist, also der gegebene Punkt auf der Ellipse liegt, und die Werthe von x_1 und y_1 werden imaginär, wenn der gegebene Punkt innerhalb der Ellipse liegt und folglich $N < a^2b^2$ ist.

Wir dürfen um so eher die Aufgabe, aus den Coordinaten der Berührungspunkte zweier Tangenten die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes zu berechnen, dem Leser zur eigenen Uebung überlassen, da die Anm. zu §. 78 Anleitung zur Auflösung dieser Aufgabe gibt.

C. Die Durchmesser der Ellipse.

*§. 78. Lehrsatz.

Die Mitten paralleler Sehnen der Ellipse liegen auf einem Durchmesser, d. h. auf einer durch den Mittelpunkt gehenden geraden Linie.

Bew. Sind $x_1\ y_1$ und $x_2\ y_2$ die Coordinaten der Endpunkte einer Sehne GH, Fig. 38, so erhalten wir zunächst, da diese Punkte auf der Ellipse liegen, die Gleichungen

$$a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2$$

und

$$a^2y_2^2 + b^2x_2^2 = a^2b_1^2$$

folglich

$$a^2(y_1^2 - y_2^2) + b^2(x_1^2 - x_2^2) = 0,$$

woraus sich weiter

$$\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = -\frac{b_2}{a^2} \cdot \frac{(x_1 - x_2)}{y_1 - y_2}$$

ergibt. Nach §. 13 sind $\frac{x_1 + x_2}{2}$ und $\frac{y_1 + y_2}{2}$ die Coordinaten des Halbirungspunktes L der Sehne GH. Bezeichnen wir daher den Winkel, um welchen die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Mittelpunkte C von der Abscissenaxe abweicht, mit α, so ist

$$\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \operatorname{tang} \alpha$$

und wenn wir den Winkel, um welchen die Sehne GH von der Richtung der Abscissenaxe abweicht, β nennen, zufolge §. 25

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \operatorname{cotg} \beta.$$

Setzen wir diese Werthe in die obige Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$\operatorname{tang} \alpha = -\frac{b^2}{a^2} \operatorname{cotg} \beta,$$

woraus sich

$$\operatorname{tang} \alpha \,.\, \operatorname{tang} \beta = -\frac{b^2}{a^2}$$

ergibt. Denken wir uns nun noch irgend eine andere, aber mit GH parallele Sehne der Ellipse gezogen, und bezeichnen wir den Winkel, welchen die aus dem Halbirungspunkte derselben nach dem Mittelpunkte der Ellipse gezogene Linie mit der Abscissenaxe bildet, mit α', so finden wir durch eine der eben angestellten ganz gleiche Ueberlegung

$$\operatorname{tang} \alpha' \operatorname{tang} \beta = -\frac{b^2}{a^2},$$

woraus $\alpha' = \alpha$ hervorgeht. Die Mitten der beiden parallelen Sehnen liegen daher auf dem nämlichen Durchmesser.

Sind $x_1\ y_1$ und $x_2\ y_2$ die Coordinaten der Berührungspunkte zweier sich schneidenden Tangenten GK und HK, Fig. 38, so haben wir nach §. 77 für diese die Gleichungen

$$a^2yy_1 + b^2xx_1 = a^2b^2$$

und

$$a^2yy_2 + b^2xx_2 = a^2b^2.$$

Bezeichnen wir nun einfach die Coordinaten des Durchschnittspunktes K der beiden Tangenten mit x und y, so daß also die Buchstaben x und y in beiden Gleichungen die nämlichen Werthe repräsentiren, so erhalten wir durch Subtraction dieser Gleichungen

$$a^2y(y_1 - y_2) + b^2x(x_1 - x_2) = 0$$

also

$$\frac{y}{x} = -\frac{b^2(x_1 - x_2)}{a^2(y_1 - y_2)}.$$

Wenn wir nun den Winkel, welchen die Berührungssehne GH mit der Abscissenaxe bildet, β, den Winkel, unter welchen die Verbindungslinie der Mitte L dieser Sehnen

mit dem Mittelpunkte C der Ellipse die Abscissenaxe schneidet, α und endlich den Winkel, um welchen die Verbindungslinie des Mittelpunktes C mit dem Durchschnittspunkte K der Tangenten von der Abscissenaxe abweicht, α'' nennen, so verwandelt sich die obige Gleichung in

$$\tan \alpha'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \cot \beta = \tan \alpha,$$

woraus $\alpha'' = \alpha$ hervorgeht. Die zwischen dem Mittelpunkte C und dem Durchschnittspunkte K zweier Tangenten gezogene Linie halbirt folglich die Sehne GH, welche die Berührungspunkte verbindet.

*§. 79. Zusatz.

1) Wenn man die Coordinaten des Punktes M, Fig. 38, in welchem der durch die Mitte der Sehne GH gezogene Durchmesser die Ellipse schneidet, mit x, y und den Winkel, um welchen die durch den Punkt M gezogene Tangente von der Abscissenaxe abweicht, mit φ bezeichnen, so ist nach §. 75

$$\tan \varphi = -\frac{b^2 x}{a^2 y} = -\frac{b^2}{a^2} \cot \alpha,$$

also vermöge der im vorherg. §. erwiesenen Gleichung

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta = -\frac{b^2}{a^2}$$

Winkel $\varphi = \beta$, d. h. die durch den Endpunkt eines Durchmessers gezogene Tangente ist den von demselben halbirten Sehnen parallel.

2) Wenn wir uns die Sehne GH in paralleler Lage so fortbewegt denken, daß der Halbirungspunkt L sich mehr und mehr dem Punkte M nähert, so werden auch die Endpunkte G und H diesem Punkte immer näher rücken. Denken wir uns nun die Endpunkte G und H dem Punkte M unendlich nahe gebracht, so gibt offenbar die durch dieselben gehende Gerade die Richtung an, welche die Curve im Punkte M hat. Da nun, wie so eben gezeigt, die durch den Punkt M gezogene Tangente mit dieser Linie parallel ist, so hat die nach der in §. 66 angegebenen Construction gezogene Tangente nicht bloß die Eigenschaft, daß sie ganz außerhalb der Ellipse liegt, sondern sie zeigt auch die Richtung an, welche die Curve in dem Berührungspunkte hat.

3) Das Vorhergehende liefert uns auch eine leicht auszuführende Construction für die Aufgabe, an die Ellipse zwei Tangenten zu ziehen, welche einer gegebenen Linie parallel laufen. Wir ziehen nämlich zu diesem Zwecke irgend eine der gegebenen Linie parallele Sehne GH, Fig. 38, und durch den Halbirungspunkt derselben L einen Durchmesser MN. Die durch die Endpunkte desselben M und N mit der gegebenen Linie gezogenen Parallelen QR und ST sind die gesuchten Tangenten.

*§. 80. Zusatz.

Wenn wir uns zu dem Durchmesser MN, Fig. 38, irgend eine parallele Sehne gezogen denken und folglich mit α den Winkel, welchen dieselbe mit der Abscisse bildet, mit β' aber den Winkel bezeichnen, welchen der durch die Mitte dieser Sehne gezogene Durchmesser OP mit der Abscissenaxe bildet, so erhalten wir zur Bestimmung von β' zufolge §. 78 die Gleichung

$$\tan \beta' \cdot \tan \alpha = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Da nun auch nach dem eben angeführten §.

$$\mathrm{tang}\,\alpha\,.\,\mathrm{tang}\,\beta = -\frac{b^2}{a^2}$$

ist, so ergibt sich hieraus W. $\beta' = \beta$, d. h. der Durchmesser OP, welcher die zu einem andern Durchmesser MN parallelen Sehnen halbirt, ist den Sehnen parallel, welche von dem Durchmesser MN halbirt werden. Man pflegt dergleichen Durchmesser, deren jeder die dem andern parallelen Sehnen halbirt, conjugirte oder zugeordnete Durchmesser zu nennen.

Da hiernach zu jedem Durchmesser der Ellipse nur ein einziger conjugirter Durchmesser gehören kann, so folgt hieraus, daß, eben so wie im Kreise, zwei nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehnen der Ellipse sich nicht gegenseitig halbiren können. Denn angenommen, dies wäre möglich, so müßte der durch den Halbirungspunkt gehende Durchmesser so wohl dem der einen, als dem der anderen Sehne parallelen Durchmesser conjugirt sein, was doch zufolge des Obigen nicht möglich ist. Weiter ergibt sich hieraus, daß die Diagonalen eines jeden in die Ellipse gezeichneten Parallelogramms sich im Mittelpunkte der Ellipse durchschneiden.

*§. 81. Aufgabe.

Die Größe eines Durchmessers MN, Fig. 38, der Ellipse zu berechnen, wenn der Winkel MCB, welchen derselbe mit der großen Axe AB bildet, gegeben ist.

Aufl. Bezeichnen wir den gesuchten Durchmesser mit 2A, die Coordinaten des Endpunktes M mit x und y, so ist

$$x = A\cos\alpha \text{ und } y = A\sin\alpha.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung der Ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

so verwandelt sich dieselbe in

$$a^2A^2\sin\alpha^2 + b^2A^2\cos\alpha^2 = a^2b^2.$$

Demnach ist $$A^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin\alpha^2 + b^2\cos\alpha^2}.$$

*§. 82. Zusatz.

Wenn wir der Gleichung des vorherg. §. die folgende Form geben

$$A^2 = \frac{a^2b^2}{(a^2 - b^2)\sin\alpha^2 + b^2}$$

so ergibt sich aus derselben, daß der Durchmesser 2A mit zunehmender Größe des (spitzen) Winkels α abnimmt, und daß für $\alpha = 0$ derselbe am größten, nämlich $= 2a$ und für $\alpha = 90^0$ am kleinsten, nämlich $= 2b$ wird. Die große Axe ist also die größte, die kleine Axe die kleinste von allen Linien welche sich durch den Mittelpunkt der Ellipse ziehen lassen.

*§. 83. Lehrsatz.

Sind $OP = 2A$ und $MN = 2B$, Fig. 38, conjugirte Durchmesser und ist der Winkel MCP, unter welchem sie sich durchschneiden, $= \gamma$, so finden folgende Gleichungen statt I. $A^2 + B^2 = a^2 + b^2$

und II. $AB\sin\gamma = ab.$

Beweis. Bezeichnen wir mit α und β die Winkel, welche die Durchmesser 2A und 2B mit der positiven Richtung der Abscissenaxe bilden, so findet nach §. 80 zwischen den Winkeln α und β die Gleichung

$$1)\quad \tang \alpha \tang \beta = -\frac{b^2}{a^2}$$

statt, und nach §. 81 ist

$$2)\quad A^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin \alpha^2 + b^2 \cos \alpha^2}$$

und

$$3)\quad B^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin \beta^2 + b^2 \cos \beta^2}.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen mit der Gleichung

$$1 = \sin \alpha^2 + \cos \alpha^2$$

und dividiren dann Zähler und Nenner in der ersteren mit $\cos \alpha^2$, in der anderen mit $\cos \beta^2$, so verwandeln sich dieselben in

$$4)\quad A^2 = \frac{a^2b^2 (1 + \tang \alpha^2)}{a^2 \tang \alpha^2 + b^2}$$

und

$$5)\quad B^2 = \frac{a^2b^2 (1 + \tang \beta^2)}{a^2 \tang \beta^2 + b^2},$$

wofür wir auch vermöge Gleichung (1) setzen können

$$6)\quad B^2 = \frac{a^4 \tang \alpha^2 + b^4}{a^2 \tang \alpha^2 + b^2}.$$

Durch Addition der Gleichungen (4) und (6) ergibt sich nach einiger Reduction

$$7)\quad A^2 + B^2 = a^2 + b^2.$$

Wenn wir ferner die Gleichungen (2) und (3) mit einander multipliciren, so erhalten wir nach einer einfachen Umformung

$$8)\quad \frac{a^4b^4}{A^2B^2} = a^4 \sin \alpha^2 \sin \beta^2 + a^2b^2 \sin \alpha^2 \cos \beta^2$$
$$+ a^2b^2 \cos \alpha^2 \sin \beta^2 + b^4 \cos \alpha^2 \cos \beta^2.$$

Vermöge Gleichung (1) ist aber

$$a^2 \sin \alpha \sin \beta = - b^2 \cos \alpha \cos \beta.$$

Multipliciren wir diese Gleichung einmal mit $a^2 \sin \alpha \sin \beta$, das anderemal mit $- b^2 \cos \alpha \cos \beta$, so erhalten wir das einemal

$$a^4 \sin \alpha^2 \sin \beta^2 = - a^2b^2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta,$$

das anderemal

$$b^4 \cos \alpha^2 \cos \beta^2 = - a^2b^2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (8) ein, so verwandelt sich dieselbe, wenn wir beiderseits mit a^2b^2 dividiren in

$$9)\quad \frac{a^2b^2}{A^2B^2} = \sin \alpha^2 \cos \beta^2 + \cos \alpha^2 \sin \beta^2 - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta$$

oder

$$10)\quad \frac{a^2b^2}{A^2B^2} = (\sin (\beta - \alpha))^2,$$

also

$$11)\quad AB \sin (\beta - \alpha) = ab.$$

Nun ist aber in Fig. 38 W. α = MCB, β = OCB und W. γ = MCP, folglich $\beta - \alpha$ = OCM = $180^0 - \gamma$, wonach die Gleichung (11) übergeht in

$$12)\quad AB \sin \gamma = ab.$$

*§. 84. Zusatz.

Aus der zuletzt erhaltenen Gleichung folgt, daß alle um die Ellipse gezeichneten Parallelogramme, deren Seiten zweien conjugirten Durchmessern parallel laufen, (wie z. B. das Parallelogramm QRST, Fig. 38, in welchem QR = OP = 2A, QS = MN = 2B und W. QST = MCP = γ ist), gleichen Flächeninhalt haben.

Denken wir uns ferner die Endpunkte der conjugirten Durchmesser MN und OP durch gerade Linien verbunden, so ist das entstandene Parallelogramm MPNO offenbar die Hälfte des Parallelogramms QRST. Es haben daher auch alle in die Ellipse gezeichneten Parallelogramme, deren Diagonalen conjugirte Durchmesser sind, gleichen Flächeninhalt. (Vergl. auch unten §. 89.)

Aus der Gleichung (1) des vorherg. §. aber

$$A^2 + B^2 = a^2 + b^2$$

geht hervor, daß, wenn von zwei conjugirten Durchmessern der eine, z. B. 2A wächst, der andere 2B abnimmt.

*§. 85. Erklärung.

Zwei Sehnen GK und HK, Fig. 39, welche einen Punkt K auf der Ellipse mit den Endpunkten G und H irgend eines Durchmessers GH verbinden, werden Ergänzungssehnen oder Supplementärchorden genannt.

*§. 86. Lehrsatz.

Zwei Durchmesser OP und MN, Fig. 39, welche zweien Ergänzungssehnen GK und HK parallel laufen, sind einander zugeordnet.

Bew. Da GK || OP und CG = CH, so ist auch HS = SK. Der Durchmesser OP halbirt also die dem Durchmesser MN parallele Sehne HK. Eben so halbirt der Durchmesser MN im Durchschnittspunkte T die Sehne GK, welche OP parallel ist. Demnach sind OP und MN conjugirte Durchmesser.

*§. 87. Zusatz.

Wenn wir einen beliebigen Punkt L, Fig. 40, auf der Ellipse insbesondere mit den Endpunkten der großen Axe AB verbinden und zu den entstandenen Ergänzungssehnen AL und BL die parallelen Durchmesser MN und OP ziehen, so ist nach den bisher angewendeten Bezeichnungen MN = 2A, OP = 2B, W. MCB = LAB = α, W. OCB = β, folglich W. ACO = ABL = $180^0 - \beta$, wofür wir auch im Folgenden kürzer β' setzen wollen, und W. OCM = ALB = γ.

In §. 78 erhielten wir die Gleichung

$$\text{tang}\,\alpha \,.\, \text{tang}\,\beta = -\frac{b^2}{a^2},$$

wofür wir nun auch

$$1)\quad \text{tang}\,\alpha \,.\, \text{tang}\,\beta' = \frac{b^2}{a^2}$$

setzen können. Aus dieser Gleichung folgt zunächst, daß Winkel β' abnimmt, wenn W. α wächst, und ferner, da b < a ist, daß $\alpha + \beta' < 90^0$ ist, mit Ausnahme des Kreises, in welchem b = a, also tang α . tang $\beta' = 1$

ist. In der vom Kreise abweichenden Ellipse ist daher der über der großen Axe AB gezeichnete Peripheriewinkel ALB $= \gamma$ allemal größer, als ein rechter. Zur Berechnung dieses Winkels γ haben wir die Gleichung

$$\tang (180^0 - \gamma) = \tang (\alpha + \beta') = \frac{\tang \alpha + \tang \beta'}{1 - \tang \alpha \,.\, \tang \beta'}$$

oder vermöge Gleichung (1)

$$2) \quad \tang (180^0 - \gamma) = \frac{a^2 \tang \alpha^2 + b^2}{(a^2 - b^2) \tang \alpha}.$$

Geben wir der so eben erhaltenen Gleichung (2) die Form

$$3) \quad \tang (180^0 - \gamma) = \frac{(a \tang \alpha - b)^2}{(a^2 - b^2) \tang \alpha} + \frac{2ab}{a^2 - b^2},$$

so läßt uns dieselbe erkennen, daß W. $180^0 - \gamma$ am kleinsten, also W. γ selbst am größten wird, wenn

$$\tang \alpha = \frac{b}{a}$$

und folglich vermöge Gleichung (1) $\alpha = \beta'$ ist. Wir erhalten daher die den größten Conjugationswinkel ADB einschließenden Sehnen, wenn wir einen Endpunkt D der kleinen Axe, Fig. 41, mit den Endpunkten der großen Axe AB verbinden, da

$$\tang DAB = \tang DBA = \frac{b}{a}$$

ist. Der Winkel $180^0 - \gamma$ wird dagegen am größten, der Conjugationswinkel γ also am kleinsten, nämlich $= 90^0$, wenn $\alpha = 0$ ist. Die beiden Axen der Ellipse schließen folglich den kleinsten Conjugationswinkel ein.

Wenn wir mit den Sehnen AD und BD, welche den größten Conjugationswinkel einschließen, die parallelen Durchmesser FG und HK ziehen und dieselben, da sie nach §. 81 offenbar gleiche Größe haben müssen, mit den nämlichen Buchstaben A_1 bezeichnen, so verwandelt sich in diesem besonderen Falle die Gleichung (I.) des §. 83 in

$$2A_1^2 = a^2 + b^2,$$

also

$$A_1 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich die Proportion

$$CL : CG = 1 : \sqrt{2},$$

da $CL = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ ist. Es findet also bei der Ellipse die nämliche Proportion wie in der homologen Figur beim Kreise statt, nur mit dem Unterschiede, daß bei diesem CG = CB = CD ist.

1. Wenn wir uns in der Ellipse zwei conjugirte Durchmesser gezogen denken und die auf die halbe Ellipse ADB, Fig. 41, fallenden Endpunkte derselben mit U und V benennen, wenn wir uns ferner den Radius CU durch Drehung um den Mittelpunkt C aus der Lage CB in die Lage CG fortbewegt denken, so beschreibt gleichzeitig der Radius CV den größeren Winkel DCH, während der Radius CU um den Winkel BCG gedreht wird, und vermöge Gleichung (3) nimmt während dieser Bewegung der von den beiden Radien eingeschlossene Conjugationswinkel UCV fortwährend zu. Wird dann der

Radius CU noch weiter über CG hinaus bis CD gedreht, so rückt der Radius CV von CH nach CA fort und der Conjugationswinkel UCV nimmt jetzt eben so von dem größten Werthe GCH bis 90^0 wieder ab, wie er vorher von 90^0 bis GCH gewachsen ist.

Wenn wir auf der halben Ellipse ADB, Fig. 41, einen Punkt Z annehmen und denselben mit den Endpunkten der großen Axe AB verbinden, so ist der durch diese Construction erhaltene Winkel zufolge der eben ausgeführten Entwicklung am größten, wenn der Punkt Z auf D fällt, derselbe wird um so kleiner, je weiter sich der Punkt Z von D entfernt, und er ist von einem rechten, als dem kleinsten Grenzwerthe, unendlich wenig verschieden, wenn der Punkt Z von A oder B um eine unendlich kleine Entfernung absteht.

2. Die vorhergehenden Sätze lassen folgende praktische Anwendung zu: Um zu einer gezeichneten Ellipse den Mittelpunkt und die beiden Axen zu finden, zieht man in derselben zunächst zwei parallele Sehnen. Die durch die Mitten derselben bis an die Ellipse gezogene Linie ist ein Durchmesser und der Halbirungspunkt dieser Linie der gesuchte Mittelpunkt der Ellipse. Beschreibt man dann über diesem Durchmesser einen Halbkreis, verbindet den Punkt in welchem derselbe die Ellipse schneidet, mit den Endpunkten des Durchmessers und zieht zu den entstandenen Ergänzungssehnen parallele Durchmesser, so schließen diese einen rechten Winkel ein und sind folglich die gesuchten Axen.

3. Endlich bemerken wir noch, daß jedes Paar conjugirter Durchmesser die Fläche der Ellipse in vier gleiche Theile theilt, wie leicht daraus hervorgeht, daß jeder von zwei conjugirten Durchmessern die dem andern parallelen Sehnen halbirt. Die beiden gleichen Durchmesser FG und HK, Fig. 41, aber und die Axen der Ellipse AB und CD theilen die Fläche derselben in acht gleiche Theile.

D. Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse für schiefwinklige Axen.

*§. 88. Aufgabe.

Die Gleichung der Ellipse für schiefwinklige Axen, welche durch den Mittelpunkt gehen, abzuleiten, wenn die Winkel, welche die neue Abscissen- und Ordinatenaxe mit der großen Axe der Ellipse (d. h. mit der bisher als Abscissenaxe angenommenen Linie) bilden, gleich α und β gegeben sind.

Aufl. Bezeichnen wir mit u und v die Coordinaten irgend eines Punktes auf der Ellipse für das neue Axensystem, mit x und y aber die Coordinaten des nämlichen Punktes für das bisherige Axensystem, bei welchem die große Axe der Ellipse mit der Abscissenaxe zusammenfiel, so ist nach §. 15

$$x = u \cos \alpha + v \cos \beta \text{ und } y = v \sin \alpha + v \sin \beta.$$

Setzen wir diese Werthe in die Mittelpunktsgleichung der Ellipse für das bisher behandelte Axensystem

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

ein, so verwandelt sich dasselbe in

$$a^2(u \sin \alpha + v \sin \beta)^2 + b^2(u \cos \alpha + v \cos \beta)^2 = a^2b^2,$$

oder wenn wir entwickeln und ordnen:

$$\left.\begin{array}{c}(a^2 \sin \beta^2 + b^2 \cos \beta^2)\, v^2 + (a^2 \sin \alpha^2 + b^2 \cos \alpha^2)\, u^2 \\ 2(a^2 \sin \alpha \sin \beta + b^2 \cos \alpha \cos \beta)\, uv\end{array}\right\} = a^2b^2.$$

*§. 89. Zusatz.

Nehmen wir an, daß der Winkel α gegeben ist, daß es uns dagegen frei steht, dem Winkel β eine beliebige Größe beizulegen, so wird die am Ende des vorherg. §. erhaltene Gleichung eine wesentliche Vereinfachung erfahren, wenn wir den Winkel β so wählen, daß der Gleichung

$$\text{tang}\,\beta = -\frac{b^2}{a^2}\,\text{cotg}\,\alpha$$

Genüge geschieht, indem dann der Coefficient des dritten Gliedes verschwindet und jene Gleichung übergeht in

$$(a^2 \sin\beta^2 + b^2 \cos\beta^2)\,v^2 + (a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2)\,u^2 = a^2b^2.$$

Zufolge des in §. 80 Vorgetragenen fallen aber unter dieser Voraussetzung die neuen Coordinatenaxen mit zwei conjugirten Durchmessern zusammen. Bezeichnen wir in Uebereinstimmung mit §. 83 den mit der neuen Abscissenaxe zusammenfallenden Durchmesser mit 2A und den auf die Ordinatenaxe fallenden Durchmesser mit 2B, so ist vermöge der obigen Gleichung, (so wie auch vermöge §. 83)

$$a^2 \sin\beta^2 + b^2 \cos\beta^2 = \frac{a^2b^2}{B^2} \text{ und } a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2 = \frac{a^2b^2}{A^2}.$$

Setzen wir diese Werthe in die zuletzt aufgeführte Gleichung der Ellipse ein, so verwandelt sich dieselbe nach einer leichten Umformung in

$$A^2v^2 + B^2u^2 = A^2B^2,$$

eine Gleichung, welche ganz die nämliche einfache Form hat, wie die Mittelpunktsgleichung der Ellipse für rechtwinklige Axen, welche mit den Hauptdurchmessern der Ellipse zusammenfallen. Wählen wir zu Coordinatenaxen die beiden gleichen Durchmesser der Ellipse, welche, wie wir oben gesehen haben, den größten Conjugationswinkel einschließen, und bezeichnen wir dieselben so wie früher, mit $2A_1$, so erhält die Gleichung der Ellipse die folgende Form

$$v^2 + u^2 = A_1^2,$$

welche mit der Gleichung des Kreises übereinstimmt; der Unterschied ist jedoch der, daß bei der Ellipse diese Gleichung nur für ein einziges Paar, beim Kreise für jedes Paar conjugirter Durchmesser gilt, wobei wir in Uebereinstimmung mit §. 80 unter conjugirten Durchmessern solche verstehen, von denen jeder die dem andern parallelen Sehnen halbirt.

1. Vermöge der Gleichung

$$A^2v^2 + B^2u^2 = A^2B^2$$

erhält v offenbar seinen größten Werth, nämlich B, wenn u verschwindet. Sind daher OP und MN, Fig. 39, conjugirte Durchmesser, also CM = B, und ist für irgend einen Punkt K auf der Ellipse KS = v, so ist KS < CM und folglich auch, wenn wir uns die Punkte K und M mit den Endpunkten des Durchmessers OP verbunden denken, △ OKP < OMP. Denken wir uns noch diese Dreiecke zu in die Ellipse gezeichneten Parallelogrammen vervollständigt, so erhalten wir den Satz: **Das Parallelogramm, dessen Diagonalen conjugirte Durchmesser sind, ist größer, als jedes andere in die Ellipse gezeichnete Parallelogramm.** (Vergl. auch oben §. 84.)

Eben so leicht, aber in anderer Art ist der analoge Satz zu erweisen: **Ein um die Ellipse gezeichnetes Parallelogramm, dessen Seiten die Ellipse in den Endpunkten conjugirter Durchmesser berühren, ist kleiner, als**

jedes um die Ellipse gezeichnete Parallelogramm, von welchem diese Bedingung nicht erfüllt wird.

2. Die Gleichung

$$A^2v^2 + B^2u^2 = A^2B^2$$

liefert das Resultat

$$v = \pm \frac{B}{A} \cdot \sqrt{A^2 - u^2}.$$

Da hiernach die Ordinate v zwei verschiedene Werthe erhält oder verschwindet oder imaginär wird, je nachdem $u^2 >$ oder $=$ oder $< A^2$ ist, da ferner der Winkel β, unter welchem dieselbe die Abscissenaxe schneidet, jede beliebige Größe haben kann, so folgt hieraus, daß eine gegen die erste Axe der Ellipse geneigte Linie dieselbe entweder in zwei Punkten schneidet oder in einem Punkte berührt oder gar nicht trifft, und da ferner die Gleichung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

für die Abscisse die beiden Werthe

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

liefert, also eine mit der ersten Axe parallele Linie, (so lange deren Abstand von der ersten Axe $< b$ ist,) die Ellipse in zwei Punkten schneidet, so ergibt sich hieraus, daß eine gerade Linie mit der Ellipse nie mehr, als zwei Punkte gemeinschaftlich haben kann.

E. Die Scheitelgleichung der Ellipse.

§. 90. Erklärung.

Die durch den Brennpunkt zur großen Axe senkrecht gezogene Sehne PP', Fig. 42, heißt der Parameter der Ellipse und wird in Folgendem mit 2p bezeichnet werden.

§. 91. Zusatz.

Wenn wir in der Mittelpunktsgleichung der Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

$x = c$ setzen, so wird nach der Erklärung des vorherg. §. $y = p$; die aufgeführte Gleichung verwandelt sich aber durch diese Substitution in

$$p^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - c^2) = \frac{b^4}{a^2},$$

woraus

$$p = \frac{b^2}{a} \text{ und } 2p = \frac{2b^2}{a}$$

hervorgeht. Es ergibt sich aber hieraus weiter die Proportion

$$2a : 2b = 2b : 2p,$$

d. h. die kleine Axe der Ellipse ist die mittlere Proportionale zwischen der großen Axe und dem Parameter.

Da beim Kreise $a = b$ ist, so ist auch $p = a$ und folglich der Parameter 2p dem Durchmesser 2a gleich.

§. 92. Lehrsatz.

Wenn wir den Scheitel A, Fig. 42, als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems und die große Axe als Abscissenaxe annehmen, so erhalten wir für die Ellipse die folgende Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

welche die Scheitelgleichung genannt wird.

Bew. Wenn wir die Abscisse irgend eines Punktes G, Fig. 42, auf der Ellipse für den Scheitel A als Anfangspunkt mit x, für den Mittelpunkt C als Anfangspunkt mit x_1, in beiden Fällen aber die Ordinate mit y bezeichnen, so ist nach §. 8

$$x_1 = x - a.$$

Setzen wir diesen Werth in die Mittelpunktsgleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2)$$

ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - (x - a)^2) = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2).$$

§. 93. Zusatz.

Wenn wir in der so eben erhaltenen Scheitelgleichung der Ellipse vermöge §. 91 $b^2 = ap$ setzen, so verwandelt sich dieselbe in

$$y^2 = \frac{p}{a}(2ax - x^2) = 2px - \frac{px^2}{a}.$$

Während wir oben gesehen haben, daß bei der Parabel das Quadrat der Ordinate gleich dem Rechtecke aus der Abscisse und dem Parameter ist, ist hiernach bei der Ellipse das Quadrat der Ordinate allemal kleiner, als dieses Rechteck, (wovon sich der Name Ellipse herschreibt). Der Unterschied zwischen dem Quadrate der Ordinate und dem Rechtecke aus der Abscisse und dem Parameter $\left(\text{nämlich der Ausdruck } \frac{px^2}{a}\right)$ wird um so kleiner, je größer die große Axe der Ellipse 2a ist, und er verschwindet, wenn die große Axe (bei ungeändertem Parameter) unendlich groß angenommen wird. Die Gleichung der Ellipse geht dann in die der Parabel

$$y^2 = 2px$$

über. Die Parabel kann folglich als eine Ellipse mit unendlich großer Axe angesehen werden. Vergl. oben §. 63 Anm.

Wenn wir uns von einer Ellipse den Parameter 2p und die Excentricität e als gegeben denken, so erhalten wir zur Berechnung der Axen nach §. 62 u. 91 die Gleichungen

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \text{ und } b^2 = ap,$$

woraus sich

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \text{ und } b = \frac{p}{\sqrt{(1 - e^2)}}$$

ergibt. Setzen wir diese Werthe in die Scheitelgleichung der Ellipse

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a},$$

so verwandelt sich dieselbe in

$$y^2 = 2px - (1 - e^2)x^2.$$

Denken wir uns nun die Excentricität e als veränderlich, den Parameter 2p als fest gegeben, z. B. gleich der Linie PP′ in Fig. 42, so werden wir durch die Punkte P und P′ unzählige Ellipsen construiren können, je nachdem wir der Excentricität e verschiedene Werthe beilegen. Setzen wir $e = 0$, so verwandelt sich die zuletzt aufgeführte Gleichung in die folgende

$$y^2 = 2px - x^2,$$

welche nach §. 31 einem Kreise angehört, der $2p = PP'$ zum Durchmesser hat; setzen wir aber $e = 1$, so geht jene Gleichung in die Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2px$$

über. Wir erhalten so die Parabel als eine Ellipse, deren Parameter einer gegebenen Linie und deren Excentricität der Einheit gleich ist.

*§. 93. Zusatz.

Die in §. 92 ausgeführte Entwicklung kann auch in der Art ausgedehnt werden, daß nicht gerade der Scheitel, sondern ein beliebiger Punkt der Ellipse als Anfangspunkt der Coordinaten angenommen wird. Bezeichnen wir mit 2A den durch diesen Punkt gehenden Durchmesser, mit 2B den conjugirten Durchmesser und mit u und v die denselben parallelen Coordinaten, so erhalten wir aus der Gleichung des §. 89

$$A^2v^2 + B^2u^2 = A^2B^2$$

durch eine ganz analoge Umformung, wie wir in §. 92 ausgeführt haben,

$$v^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Au - u^2),$$

oder wenn wir in Uebereinstimmung mit §. 91

$$\frac{B^2}{A} = P$$

setzen:
$$v^2 = 2P\left(u - \frac{u^2}{2A}\right).$$

Setzen wir die Differenz $A^2 - B^2 = C^2$, und nennen wir diejenigen Punkte eines Durchmessers 2A die demselben angehörigen Brennpunkte, deren Abstand vom Mittelpunkte $= C$ ist, so ist, so lange $A > B$ (vergl. oben §. 87) ist, der diesem Durchmesser entsprechende Parameter 2P gleich der durch den Brennpunkt dem conjugirten Durchmesser 2B parallel gezogenen Sehne, indem die Mittelpunktsgleichung der Ellipse
$$A^2v^2 + B^2u^2 = A^2B^2$$
für diese Annahme übergeht in

$$A^2P^2 + B^2(A^2 - B)^2 = A^2B^2,$$

woraus
$$P = \frac{B^2}{A}$$
hervorgeht.

Ist $A = B$, so wird $C = 0$ und $P = A$; ist $A < B$, so wird C imaginär; aber auch dann ergibt die eben ausgeführte Substitution den nämlichen Ausdruck für den Parameter P und behält folglich die Gleichung

$$v^2 = 2P\left(u - \frac{u^2}{2A}\right)$$

ihre Giltigkeit.

§. 94. Lehrsatz.

Wenn die Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems mit den beiden Axen der Ellipse parallel laufen, wenn ferner der Mittelpunkt der Ellipse in einen Punkt fällt, dessen Coordinaten $= \alpha$ und β gegeben sind, und wenn endlich x und y die Coordinaten eines Punktes auf der Ellipse bezeichnen, so erhalten wir für die Ellipse die Gleichung

$$a^2 (y - \beta)^2 + b^2 (x - \alpha)^2 = a^2 b^2.$$

Der Beweis ist derselbe wie von §. 30.

F. Die Gleichung der Ellipse für Polar-Coordinaten.

§. 95. Aufgabe.

Die Gleichung der Ellipse für Polarcoordinaten abzuleiten, wenn der Pol in dem einen Brennpunkt F, Fig. 42, und die Axe der Polarcoordinaten mit der großen Axe der Ellipse zusammenfällt.

Aufl. Wenn wir für irgend einen Punkt G auf der Ellipse den Radius FG mit r und die Anomalie BFG mit φ bezeichnen, ferner die Abscisse des Punktes G, wenn F als Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten angenommen wird, mit x_1 bezeichnen, so ist

$$x_1 = r \cos \varphi.$$

Nun ist aber, wenn wir die Abscisse des Punktes G für den Mittelpunkt als Anfangspunkt mit x bezeichnen, nach §. 8 und 62

$$x_1 = c + x = ae + x$$

und

$$r = a + ex$$

folglich

$$x_1 = \frac{r - a(1 - e^2)}{e}.$$

Setzen wir diesen Werth in die zuerst aufgeführte Gleichung ein, so erhalten wir

$$r - a(1 - e^2) = er \cos \varphi,$$

also

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \varphi}.$$

Diese Gleichung ist darum von besonderer Wichtigkeit, weil dieselbe den Berechnungen der elliptischen Bahnen der Planeten zu Grunde gelegt wird. — Setzen wir in derselben $e = 0$, so wird $r = a$, d. h. die Ellipse geht in einen Kreis über.

In der Anm. zu §. 93 haben wir

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

gefunden. Setzen wir diesen Werth in die obige Gleichung ein, so vereinfacht sich dieselbe in

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $e = 1$, so geht dieselbe in Uebereinstimmung mit §. 93, Anm. über in die Polargleichung der Parabel (§. 57)

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}.$$

G. Die Ellipse als geometrischer Ort auf die Directrix und den Brennpunkt bezogen.

§. 96. Erklärung.

Eine Linie DJ, Fig. 42, welche auf der Verlängerung der großen Axe der Ellipse senkrecht steht und dieselbe in einem Abstande AD vom Scheitel durchschneidet, welcher sich zu der Entfernung AF des Scheitels A von dem ihm zunächst liegenden Brennpunkte F wie die halbe große Axe AC zur linearen Excentricität CF verhält, wird die zu diesem Brennpunkte gehörende Directrix der Ellipse genannt.

§. 97. Lehrsatz.

Für jeden Punkt auf der Ellipse ist das Verhältniß seiner Entfernung vom Brennpunkte zu der Entfernung von der Directrix der numerischen Excentricität e gleich.

Bew. Zunächst ist für den Scheitel A zufolge der Erklärung des vorherg. §.

$$AF : AD = CF : AC = c : a = e.$$

Nehmen wir ferner auf der Ellipse einen beliebigen Punkt G, Fig. 42, an, und ziehen wir aus demselben die Senkrechte zur Directrix GK, den Brennstrahl FG und die Ordinate GH, dann ist

$$GK = DH = AD + AH.$$

Nun ist aber zufolge der eben aufgeführten Proportion

$$AD = \frac{AF}{e} = \frac{(a - c)}{e} = \frac{a(1 - e)}{e} = \frac{a}{e} - a$$

und $AH = a + x$,

folglich $$GK = \frac{a}{e} + x = \frac{a + ex}{e}.$$

In §. 70 haben wir gefunden

$$FG = r = a + ex;$$

hiernach ergibt sich $$FG : GK = e.$$

§. 98. Zusatz.

Zufolge des vorherg. §. ist der Abstand der Directrix vom Mittelpunkte (Fig. 42)

$$CD = AD + AC = \frac{a}{e}.$$

Dieser Abstand wird also, wenn die große Axe einer Ellipse gegeben ist, um so größer, je kleiner e ist, und er wird unendlich groß, wenn die Excentricität verschwindet. Die Betrachtungen dieses Kapitels finden daher auf den Kreis keine Anwendung.

§. 99. Zusatz.

Bei der Parabel ist nach §. 34 der Abstand eines beliebigen Punktes vom Brennpunkte dem Abstand von der Directrix gleich; es findet also auch bei dieser Bestimmung dasselbe Verhältniß zwischen jenen beiden Linien statt, nur mit dem Unterschiede, daß dieses Verhältniß bei der Ellipse der numerischen Excentricität gleich ist und daher alle möglichen Werthe unter 1 haben kann, bei der Parabel aber = 1 ist. Es ergibt sich uns so aufs neue die Parabel als eine Ellipse, deren Excentricität = 1 ist.

Während alle Parabeln (zufolge §. 58) die nämliche Gestalt haben, wird die Gestalt der Ellipse durch die Größe ihrer (numerischen) Excentricität bedingt, und zwei Ellipsen sind offenbar ähnlich, wenn sie gleiche Excentricität haben.

Denken wir uns für eine Ellipse die halbe große Axe = a und die Excentricität gegeben, so erhalten wir für die im Vorhergehenden betrachteten unveränderlichen Linien in der Ellipse folgende Bestimmungen:

halbe kleine Axe $b = a\sqrt{(1 - e^2)}$,

halber Parameter $p = a\,(1 - e^2)$,

lineare Excentricität $CF = c = ae$, Fig. 42,

Abstand des Mittelpunkts von der Directrix $CD = \dfrac{a}{e}$,

Abstand des Brennpunktes F von der Directrix $DF = \dfrac{a\,(1 - e^2)}{e}$,

Abstand des Brennpunktes F′ von der Directrix $DF' = \dfrac{a\,(1 + e^2)}{e}$,

Abstand des Scheitels A von der Directrix $AD = \dfrac{a\,(1 - e)}{e}$,

Abstand des Scheitels B von der Directrix $BD = \dfrac{a\,(1 + e)}{e}$,

Abstand des Scheitels A vom Brennpunkt F, $AF = a\,(1 - e)$,

Abstand des Scheitels B vom Brennpunkte F, $BF = a\,(1 + e)$.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich unter andern die Proportionen

$$CF : CA = CA : CD$$

und

$$AD : AF = BD : BF.$$

Zufolge der ersteren Proportion ist die halbe große Axe die mittlere Proportionale zwischen den Abständen des Brennpunktes und der Directrix vom Mittelpunkte, und die andere Proportion läßt die Punkte D, A, F, B als harmonische erkennen.

Sechster Abschnitt.

Von der Hyperbel.

A. Die Hyperbel als geometrischer Ort auf die Brennpunkte bezogen.

§. 100. Erklärung.

Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen die Differenz seiner Abstände von zwei gegebenen Punkten F und F′, Fig. 43, beständig die nämliche Größe hat, heißt eine Hyperbel. Die beiden gegebenen Punkte F und F′ werden die Brennpunkte und die Linien FG und F′G, welche einen Punkt auf der Hyperbel mit den Brennpunkten verbinden, werden Brennstrahlen genannt. Eine durch die beiden Brennpunkte F und F′ gehende unbegrenzt gedachte Linie wird die Hauptaxe, der Punkt C auf

derselben, welcher in der Mitte zwischen beiden Brennpunkten liegt, der Mittelpunkt und eine durch den Mittelpunkt C zur Hauptaxe CX senkrecht gezogene Linie CY die Nebenaxe der Hyperbel genannt.

§. 101. Zusatz.

1) Bezeichnen wir den Radius FG, Fig. 43, mit r, den Radius F'G mit r' und die zufolge des vorherg. §. beständige Differenz der Radien mit 2a, so erhalten wir die Gleichung

$$r' - r = 2a.$$

Setzen wir ferner den gegenseitigen Abstand der Brennpunkte $FF' = 2c$, so ist in dem Dreiecke FF'G $r' - r < 2c$,
also auch $2a < 2c$.
Beschreiben wir nun um den Punkt C mit der Linie a einen Kreis, welcher die Hauptaxe in den Punkten A und A' schneidet, so ist offenbar $AF = AF'$
also $AF' - AF = AA' = 2a$
und ebenfalls $A'F - A'F' = AA' = 2a$.
Die Punkte A und A' gehören folglich der Hyperbel an, da die Differenz ihrer Abstände von den Brennpunkten $= 2a$ ist. Diese beiden Punkte, in welchen die Hyperbel die Hauptaxe schneidet, heißen die Scheitel und ihr gegenseitiger Abstand AA', welcher, wie wir gesehen haben, $= 2a$ ist, wird die erste Axe der Hyperbel genannt. Wir können daher die obige Gleichung

$$r' - r = 2a$$

dahin aussprechen: Für jeden Punkt der Hyperbel ist der Unterschied der Brennstrahlen der ersten Axe gleich.

2) Ziehen wir durch die Scheitelpunkte A und A' die zur Axe senkrechten Linien MN und M'N', und nehmen wir zwischen denselben einen beliebigen Punkt H an, so ist, wenn wir noch $HK \perp FF'$ ziehen,

$$F'H^2 - FH^2 = F'K^2 - FK^2,$$

also $$F'H - FH = \frac{(F'K - FK) \cdot (F'K + FK)}{F'H + FH},$$

folglich $F'H - FH < F'K - FK$.
Nun ist aber $F'K - FK$ offenbar $< F'A - FA$ und, wie oben gezeigt, $F'A - FA = 2a$, also auch

$$F'H - FH < 2a.$$

Zwischen den beiden Linien MN und M'N' kann daher kein Punkt der Curve angetroffen werden. Die Hyperbel besteht folglich aus zwei durch die Scheitelpunkte gehenden ganz getrennten Stücken.

3) Um weitere Punkte dieser beiden Aeste zu erhalten, kann folgende Construction dienen: Man nehme auf der Verlängerung von FF' einen beliebigen Punkt L an und beschreibe mit AL um F und mit A'L um F' Kreise, welche sich in G und G' schneiden; dann gehören diese beiden Punkte dem durch A gehenden Hyperbelaste an, da zufolge der angegebenen Construction $F'G - FG = A'L - AL = AA' = 2a$ ist.

In ähnlicher Weise können Punkte des durch A' gehenden Astes erhalten werden.

Man erkennt aus dieser Construction leicht, daß jeder der beiden Aeste aus zwei zu beiden Seiten der Axe sich ins unendliche erstreckenden Zweigen besteht.

Zwei mit der ersten Axe 2a um die Brennpunkte beschriebene Kreise werden die Richtkreise der Hyperbel genannt. Es läßt sich leicht zeigen, daß jeder Punkt der Hyperbel von dem einen Brennpunkte und von dem um den andern Brennpunkt beschriebenen Richtkreise gleichen Abstand hat. Vergl. oben bei der Ellipse §. 63, Anm.

§. 102. Erklärung.

Das Verhältniß CF : CA = c : a, Fig. 43, wird die numerische Excentricität oder auch kurzweg die Excentricität der Hyperbel genannt und im Folgenden mit e bezeichnet werden; die Linie CF = c selbst aber heißt die lineare Excentricität.

§. 103. Zusatz.

Da bei der Hyperbel nothwendig $c > a$ ist, so ist bei derselben die Excentricität $e = \frac{c}{a} > 1$, während dieselbe bei der Ellipse immer einem ächten Bruche gleich war.

Aus der Gleichung

$$1)\ e = \frac{c}{a}$$

ergibt sich weiter $\quad 2)\ c = ae.$

§. 104. Lehrsatz.

Wenn ein Punkt innerhalb oder außerhalb eines Hyperbelastes liegt, so ist im ersten Falle die Differenz seiner Abstände von den Brennpunkten größer, im andern kleiner, als die erste Axe der Hyperbel.

Beweis. Wenn wir den innerhalb gegebenen Punkt H, Fig. 44, mit den Brennpunkten F und F' und den Punkt G, in welchem die Linie F'H den betreffenden Hyperbelast schneidet, mit F verbinden, so ist in dem Dreiecke FGH $\quad FG + GH > FH,$

folglich, wenn wir beiderseits F'G addiren:

$$F'H + FG > FH + F'G,$$

also $\quad F'H - FH > F'G - FG,$

d. h. $\quad F'H - FH > 2a.$

Ist außerhalb des den Brennpunkt F umgebenden Hyperbelastes ein Punkt K gegeben, so ist, wenn wir denselben mit F und F' verbinden, in dem Dreiecke F'GK

$$F'K < F'G + GK$$

folglich $\quad F'K + FG < F'G + FK$

also $\quad F'K - FK < F'G - FG$

d. h. $\quad F'K - FK < 2a.$

§. 105. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden §. folgt in Verbindung mit §. 100, daß ein Punkt auf einem Hyperbelaste, außerhalb oder innerhalb desselben liegen muß, je nachdem die Differenz seiner Abstände von den Brennpunkten eben so groß, kleiner oder größer, als die erste Axe der Hyperbel ist.

§. 106. Lehrsatz.

Wenn man durch einen Punkt G, Fig. 45, auf der Hyperbel eine Linie TG so zieht, daß sie den Winkel FGF′ halbirt, welchen die Brennstrahlen einschließen, so hat diese Linie mit dem Hyperbelaste nur den einen Punkt G gemeinschaftlich und liegt übrigens ganz außerhalb desselben; sie ist folglich eine Tangente.

Beweis. Wenn wir auf der Linie TG einen beliebigen Punkt K annehmen und FK und F′K ziehen, ferner von F′G die Linie FG = LG abschneiden und L mit K verbinden, so ist FGK ≌ LGK und folglich FK = LK. Weiter ist aber in dem Dreiecke F′KL

$$F'K - KL < F'L,$$

also auch

$$F'K - FK < F'L,$$

d. h: da zufolge der Construction und §. 101 F′L = F′G — FG = 2a ist,

$$F'K - FK < 2a.$$

Demnach liegt der Punkt K außerhalb des durch G gehenden Hyperbelastes.

1. Bei der Hyperbel wird der von den Brennstrahlen eingeschlossene Winkel durch die Tangente selbst, bei der Ellipse durch die Normale halbirt. Wenn daher eine Ellipse und eine Hyperbel die nämlichen Brennpunkte haben, so stehen in den Punkten, in welchen sie sich durchschneiden, ihre Tangenten auf einander senkrecht; man kann daher sagen: die beiden Curven schneiden sich in diesen Punkten rechtwinklig.

2. In ganz ähnlicher Weise, wie wir dies oben in §. 68 und 69 für die Ellipse ausgeführt haben, läßt sich zeigen, wie durch einen außerhalb eines Hyperbelastes gegebenen Punkt eine Tangente an denselben gezogen wird, und daß die Fußpunkte der aus einem Brennpunkte auf die Tangenten der Hyperbel gefällten Lothe auf einem um die erste Axe als Durchmesser beschriebenen Kreise liegen. Eben so können auch die in der Anmerkung zu §. 68 angeführten Sätze von der Ellipse in ähnlicher Art für die Hyperbel erwiesen werden.

B. Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel für rechtwinklige Axen.

§. 107, a. Aufgabe.

Aus der Abscisse x eines Punktes auf der Hyperbel die zugehörigen Brennstrahlen r und r′ zu berechnen, wenn die Hauptaxe der Hyperbel als Abscissenaxe und der Mittelpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten angenommen wird.

Aufl. Wenn wir die Ordinate GS, Fig. 44, ziehen, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken FSG und F′SG

$$F'G^2 = F'S^2 + GS^2$$

und

$$FG^2 = FS^2 + GS^2,$$

folglich

$$F'G^2 - FG^2 = F'S^2 - FS^2$$

oder

$$(F'G + FG) \,.\, (F'G - FG) = (F'S + FS) \,.\, (F'S - FS).$$

Nun ist aber FG = r, F′G = r′, F′S + FS = 2CS = 2x und F′S — FS = FF′ = 2c. Setzen wir diese Werthe in die vorhergehende Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$(r' + r) \,.\, (r' - r) = 4cx,$$

oder da nach §. 101 $r' - r = 2a$ und nach §. 102 $c : a = e$ ist,

$$r' + r = 2ex.$$

Verbinden wir hiermit die Gleichung

$$r' - r = 2a,$$

so ergibt sich $\quad r' = ex + a$

und $\quad r = ex - a.$

§. 107, b. Zusatz.

Wenn wir für einen Punkt auf dem den Brennpunkt F' umschließenden Hyperbelaste die (negative) Abscisse mit x, den nach dem Brennpunkte F gezogenen Radius mit r und den nach F' gehenden Radius mit r' bezeichnen, so ist übereinstimmend mit der obigen Entwicklung

$$r'^2 - r^2 = 4cx,$$

aber $\quad r' - r = -2a,$

folglich $\quad r' + r = -2ex,$

daher $\quad r' = -ex - a$ und $r = -ex + a.$

Bemerkung. Ehe wir zur Ableitung der Gleichung für die Hyperbel übergehen, schicken wir noch die folgende Erklärung voraus, welche uns für diese Gleichung eine Abkürzung liefert und zugleich eine Analogie zu §. 62, 3 von der Ellipse bildet, zufolge dessen das Quadrat der halben kleinen Axe (b) gleich dem Unterschiede zwischen dem Quadrate der großen Axe (a) und der linearen Excentricität (c) ist. Ein wesentlicher Unterschied besteht jedoch darin, daß bei der Ellipse $a > c$, bei der Hyperbel dagegen $c > a$ ist.

§. 108. Erklärung.

Eine Linie, deren Quadrat gleich dem Unterschiede zwischen den Quadraten der linearen Excentricität und der halben ersten Axe ist, wird die halbe zweite Axe der Hyperbel genannt und im Folgenden mit b bezeichnet werden.

§. 109. Zusatz.

Aus der vorstehenden Erklärung erhalten wir die Gleichung

$$b^2 = c^2 - a^2,$$

oder da nach §. 103 $c = ae$ ist,

$$b^2 = a^2 (e^2 - 1).$$

§. 110. Aufgabe.

Unter den Voraussetzungen des §. 107, a. die Gleichung der Hyperbel für rechtwinklige Coordinaten abzuleiten.

Aufl. In dem rechtwinkligen Dreiecke FSG, Fig. 44, ist

$$GS^2 + FS^2 = FG^2.$$

Nun ist aber $FG = r = ex - a$ (§. 107, a), $GS = y$ und $FS = CS - CF = x - c = x - ae$. Hiernach verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$y^2 + (x - ae)^2 = (ex - a)^2$$

oder

$$y^2 + x^2 - 2aex + a^2e^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$$

oder

$$y^2 + a^2 (e^2 - 1) = x^2 (e^2 - 1).$$

Zufolge des vorhergehenden §. können wir $a^2 (e^2 - 1) = b^2$ und folglich $e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$ setzen. Durch diese Substitution geht die zuletzt erhaltene

Gleichung über in
$$y^2 + b^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$$
oder
$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2.$$

In §. 71 haben wir für die Ellipse die Gleichung
$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$
erhalten. Die Gleichung der Ellipse verwandelt sich daher in die der Hyperbel, wenn wir in derselben $- b^2$ statt $+ b^2$ (nicht $- b$ statt $+ b$, wodurch nichts geändert würde) setzen.

§. 111. Zusatz.

Aus der zuletzt erhaltenen Gleichung ergibt sich
$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$
und hieraus folgt weiter:

1) Die Curve wird so wohl durch die Abscissenaxe, als auch durch die Ordinatenaxe symmetrisch getheilt, — durch die Abscissenaxe, da zu jedem Werthe der Abscisse x zwei der Größe nach gleiche, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Werthe der Ordinate y gehören, — durch die Ordinatenaxe, da die Ordinate y ganz den nämlichen Werth erhält, man mag x positiv oder negativ annehmen.

2) Die Curve schneidet die Abscissenaxe in zwei um die Entfernung a zu beiden Seiten vom Anfangspunkte abstehenden Punkten (den beiden Scheitelpunkten), da für die Abscisse $x = \pm a$ die Ordinate y verschwindet.

3) Wenn man durch die Scheitelpunkte zwei zur Abscissenaxe senkrechte Linien zieht, so kann zwischen denselben, wie schon oben in §. 101 angegeben, kein Punkt der Curve liegen, da y imaginär wird, wenn man den absoluten Werth von x kleiner als a annimmt.

4) Die Aeste der Curve erstrecken sich ins Unendliche, da die Ordinate y gleichzeitig mit der Abscisse x wächst und sich keine Grenze angeben läßt, über welche nicht beide hinaus wachsen könnten.

Bezeichnen x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes, so ist in dem Falle, daß dieser Punkt auf der Hyperbel liegt, zufolge §. 110
$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0.$$
Beschränken wir uns nun um größerer Einfachheit willen auf die Annahme, daß der betreffende Punkt in der ersten Region liegt, so läßt sich durch eine Betrachtung, welche mit der für die Ellipse in §. 74 angestellten übereinstimmt, zeigen, daß der fragliche Punkt innerhalb oder außerhalb des von dem Hyperbelaste UAGZ, Fig. 44, umschlossenen Raumes liegt, je nachdem
$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 < \text{ oder } > 0$$
ist. Man sieht leicht ein, daß dasselbe eben so für die anderen Regionen dargethan werden kann.

§. 112. Lehrsatz.

Wenn man um den Mittelpunkt C, Fig. 46, mit der linearen Excentricität CF einen Kreis beschreibt, welcher eine durch den Scheitel A zur Hauptaxe senkrechte Linie in den Punkten B und B′ schneidet, dann durch diese Punkte und den Mittelpunkt C gerade Linien zieht, so schließen sich die unendlichen Aeste der Curve an diese geraden Linien an, ohne dieselben jedoch jemals zu erreichen. Man nennt diese Linien Asymptoten.

Beweis. Wenn wir die zu irgend einer Abscisse $CS = x$ gehörige Ordinate der Curve GS mit y und die zu der nämlichen Abscisse gehörende Ordinate der Asymptote HS mit v bezeichnen, so verhält sich

$$v : x = AB : AC,$$

oder da $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{c^2 - a^2} = b$ und $AC = a$ ist,

$$v : x = b : a,$$

woraus sich
$$1)\ a^2v^2 = b^2x^2$$
ergibt. Nach §. 110 ist

$$2)\ a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2.$$

Subtrahiren wir diese Gleichungen von einander, so erhalten wir

$$a^2v^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

also
$$3)\ v^2 - y^2 = b^2.$$

Hieraus geht zunächst hervor, daß v beständig $> y$ ist, daß also die Curve die Asymptote niemals erreichen kann. Weiter ergibt sich aus der Gleichung (3)

$$4)\ v - y = \frac{b^2}{v + y}.$$

Da nun v und y gleichzeitig mit x wachsen und, wenn x unendlich angenommen wird, ebenfalls unendlich werden, so folgt aus der Gleichung (4), daß der Abstand des Curvenastes von der Asymptote immer mehr und bis zum unendlich Kleinen abnimmt.

Die Differenz $v - y$ gibt den der Ordinatenaxe parallelen Abstand eines Punktes der Curve von der Asymptote an. Bezeichnen wir den Winkel, unter welchem die Asymptote die Abscissenaxe schneidet, mit ω, so ist der senkrechte Abstand des Curvenpunktes von der Asymptote $= (v - y) \cos \omega$.

§. 113. Zusatz.

Wenn wir in der Gleichung der Hyperbel

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$$

$a = b$ setzen, so verwandelt sich dieselbe in

$$y^2 - x^2 = - a^2.$$

Man nennt die dieser Gleichung zugehörige Hyperbel eine gleichseitige. Sie stellt unter den Hyperbeln das nämliche vor, was der Kreis unter den Ellipsen. Bei derselben schneiden sich die Asymptoten unter rechten Winkeln und die Excentricität e ist $= \sqrt{2}$ (während sie dagegen beim Kreise $= 0$ ist).

§. 114. Lehrsatz.

Wenn man durch einen Punkt G, Fig. 46, auf der Hyperbel Parallelen mit den Asymptoten bis an dieselben zieht, so ist das Rechteck aus diesen Parallelen GK und GM gleich dem vierten Theile des Quadrates der linearen Excentricität, also wenn wir der Kürze wegen $GK = CM = u$ und $GM = CK = v$ setzen,

$$u \cdot v = \tfrac{1}{4}c^2.$$

Man pflegt diese Größe die Potenz der Hyperbel zu nennen.

Beweis. Bezeichnen wir die Ordinate GS des Punktes G mit y, die Abscisse CS mit x, den Winkel, welchen die Asymptote mit der Abscissenaxe bildet, mit ω, so ist

$$y = GL \sin \omega,$$

oder da $GL = GM - ML = CK - CM = v - u$ ist:

$$1)\ y = (v - u) \sin \omega.$$

Ferner ist $x = CL + LS = 2CM \cos \omega + LG \cos \omega = (CM + GM) \cos \omega$, also

$$2)\ x = (v + u) \cos \omega.$$

Nach §. 112 ist $\operatorname{tang} \omega = \frac{b}{a}$, $\sin \omega = \frac{b}{c}$ und $\cos \omega = \frac{a}{c}$; hiernach verwandeln sich die Gleichungen (1) und (2) in

$$y = \frac{b}{c} \cdot (v - u) \text{ und } x = \frac{a}{c} (v + u).$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung der Hyperbel

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$$

ein, so erhalten wir

$$(v - u)^2 - (v + u)^2 = - c^2,$$

also

$$u \,.\, v = \tfrac{1}{4}c^2.$$

Da der Inhalt des Parallelogramms $CMGK = uv \sin 2\omega = \frac{1}{4}c^2 \sin 2\omega$ ist, so haben auch die Parallelogramme, welche entstehen, wenn man durch beliebige Punkte der Hyperbel Parallelen zu den Asymptoten zieht, gleichen Flächeninhalt.

Wenn von einer Hyperbel die Asymptoten und der Scheitel A, Fig. 47, gegeben sind und man zieht durch diesen mit der einen Asymptote eine Parallele, welche die andere in a schneidet, wenn man dann weiter auf dieser die mit Oa gleichen Stücke ab, bc, cd, de u. s. w. aufträgt, durch die Punkte b, c, d, e ... Parallelen mit der anderen Asymptote zieht und $bB = \frac{1}{2}aA$, $cC = \frac{1}{3}aA$, $dD = \frac{1}{4}aA$, $eE = \frac{1}{5}aA$ u. s. w. aufträgt, so liegen die Punkte A, B, C, D, E ... auf der einen Hälfte des durch A gehenden Hyperbelastes; eine ganz ähnliche Construction liefert die andere Hälfte.

Wenn wir in der Gleichung

$$1)\ y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$$

$\frac{b}{a}$ durch $\operatorname{tang} \omega$ ersetzen, so verwandelt sich dieselbe in

$$y^2 = (x^2 - a^2) \operatorname{tang} \omega^2.$$

Nehmen wir nun den Winkel ω, welchen die Asymptoten mit der Abscissenaxe bilden, als constant an, legen wir dagegen der ersten Axe 2a mehrere verschiedene Werthe bei, so erhalten wir mehrere Hyperbeln, welche alle die nämlichen Asymptoten haben, aber in der Entfernung des Scheitels von dem Durchschnittspunkte der Asymptoten von einander verschieden sind. Lassen wir, ohne den Winkel ω zu ändern, die erste Axe 2a bis zum Verschwinden abnehmen, wo dann auch die zweite Axe $2b = 2a \operatorname{tang} \omega$ verschwindet, so fällt der Scheitel mit dem Durchschnittspunkte der Asymptoten und die Hyperbel selbst mit diesem zusammen. Wir erhalten so zwei sich schneidende gerade Linien als eine Hyperbel mit unendlich kleinen Axen.

Die obige Gleichung der Hyperbel

$$y^2 = (x^2 - a^2) \operatorname{tang} \omega^2$$

vereinfacht sich aber, wenn wir $a = 0$ annehmen, in

$$y^2 = x^2 \operatorname{tang} \omega^2,$$

wofür wir auch

$$y^2 - x^2 \operatorname{tang} \omega^2 = 0$$

setzen können, und diese Gleichung läßt sich zerlegen in die beiden Gleichungen

$$y + x \operatorname{tang} \omega = 0 \text{ und } y + x \operatorname{tang} \omega = 0,$$

welche zwei gerade Linien, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen und mit der Abscissenaxe zu beiden Seiten einen Winkel $= \omega$ bilden, also den beiden Asymptoten der durch die allgemeine Gleichung (1) gegebenen Hyperbel angehören.

§. 115. Lehrsatz.

Wenn wir eine Sehne BG, Fig. 47, über beide Endpunkte bis zum Einschnitte in die Asymptoten verlängern, so sind die Verlängerungen GH und BK einander gleich.

Beweis. Wenn wir durch die Punkte B und G mit der einen Asymptote OL Parallelen ziehen, welche die andere Asymptote in M und L schneiden, so ist nach dem vorherg. §.

$$OL \,.\, LG = OM \,.\, MB,$$

also $$OL : OM = MB : LG = HM : HL,$$

folglich auch $$OL - OM : OM = HM - HL : HL,$$

d. h. $$ML : OM = ML : HL.$$

Demnach ist $OM = HL$ und folglich auch, wie leicht zu sehen, $BK = GH$.

1. Wenn wir ganz gründlich verfahren wollen, so haben wir vorher zu zeigen, daß die verlängerte Sehne BG beide Asymptoten durchschneidet. Angenommen, sie wäre einer derselben, z. B. OH, Fig. 47, parallel, dann müßte $BM = GL$ sein. Zufolge §. 114 ist aber

$$BM \,.\, MO = GL \,.\, LO;$$

es müßte daher auch $LO = MO$ sein, und es müßten folglich die Punkte L und M und also auch die Punkte G und B in einen zusammenfallen. Vgl. auch unten §. 127, Anm.

2. Es ergibt sich hieraus ein höchst einfaches Verfahren, die Hyperbel zu zeichnen, wenn irgend ein Punkt B auf derselben und die Asymptoten gegeben sind. Zieht man nämlich durch diesen Punkt eine beliebige Linie, welche die Asymptoten in H und K schneidet, und macht $HG = BK$, so liegt zufolge des eben erwiesenen Satzes der Punkt G auf der Hyperbel. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man leicht beliebig viele Punkte der Hyperbel erhalten.

§. 116. Aufgabe.

Aus den Coordinaten x, y eines Punktes G, Fig. 48, auf der Hyperbel die Subtangente ST, die Subnormale SN und den Winkel $GTS = \varphi$ zu berechnen, welchen die Tangente mit der Abscissenaxe bildet.

Aufl. Da die Tangente TG nach §. 106 den Winkel FGF′ halbirt, welchen die Brennstrahlen einschließen, so verhält sich

$$F'T : FT = F'G : FG,$$

also auch $$F'T - FT : F'T + FT = F'G - FG : F'G + FG.$$

Nun ist aber $F'T - FT = 2CT$, $FT + F'T = F'F = 2c = 2ae$, $F'G - FG = r' - r = 2a$ und $F'G + FG = r' + r = 2ex$ (§. 107, a.). Hiernach verwandelt sich die zuletzt erhaltene Proportion in

$$CT : ae = a : ex,$$

woraus zunächst $$CT = \frac{a^2}{x}$$

und $$1)\quad ST = CS - CT = x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x}$$

hervorgeht. Weiter ist in dem rechtwinkligen Dreiecke CGN

$$SN = \frac{SG^2}{ST},$$

also vermöge Gleichung (1) und da nach §. 110

$$SG^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

ist: $$2)\quad SN = \frac{b^2x}{a^2}.$$

Hieraus folgt endlich

$$3)\quad \text{tang}\,\varphi = \text{tang}\,STG = \text{tang}\,SGN = \frac{SN}{SG} = \frac{b^2x}{a^2y}.$$

§. 117. Zusatz.

Zufolge der Gleichung (1) des vorhergehenden §.

$$ST = x - \frac{a^2}{x}$$

ist Subtangente ST beständig kleiner, als die Abscisse; die Tangenten der Hyperbel schneiden daher sämmtlich die Hauptaxe zwischen dem Mittelpunkte und dem Scheitel.

Setzen wir ferner in der Gleichung (3)

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{b^2x}{a^2y}$$

$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, so verwandelt sich dieselbe in

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{bx}{a\sqrt{(x^2 - a^2)}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)}}.$$

Der Winkel φ wird folglich um so kleiner, je größer x ist. Für $x = a$ wird tang $\varphi = \infty$, also $\varphi = 90^0$; die Tangente steht folglich im Scheitel senkrecht auf der Hauptaxe. Für $x = \infty$ wird tang $\varphi = \frac{b}{a}$, also $\varphi = \omega$, wenn ω den Winkel bezeichnet, unter welchem die Asymptote die Hauptaxe schneidet; die Tangente geht dann in die Asymptote über. — Die unendlichen Aeste der Hyperbel werden also nicht, wie bei der Parabel der Hauptaxe parallel, sondern weichen von dieser Richtung um die Größe des Winkels ab, welchen die Asymptoten mit der Hauptaxe bilden. Je größer x ist, je weiter also der Berührungspunkt einer Tangente vom Scheitel absteht, um so weniger ist vermöge der obigen Gleichung der Winkel φ von ω verschieden, um so mehr nähert sich folglich die Richtung der Tangente der Richtung der Asymptote.

*§. 118. Zusatz.

Bezeichnen wir mit x_1, y_1 die Coordinaten irgend eines Punktes auf der Hyperbel und mit x, y die Coordinaten eines Punktes auf der durch diesen Punkt gezogenen Tangente, so erhalten wir für die Tangente die Gleichung $$a^2y_1y - b^2x_1x = - a^2b^2.$$

Der Beweis ist derselbe, wie für den ähnlich lautenden von der Ellipse (§. 77), nur mit dem Unterschiede, daß bei der Hyperbel $- b^2$ zu setzen ist, wo bei der Ellipse $+ b^2$ in Anwendung kommt.

Wir benutzen die eben aufgeführte Gleichung der Tangente für die Auflösung der folgenden Aufgabe:

1) Die Coordinaten x_1, y_1 des Berührungspunktes einer Tangente zu finden, welche einer durch die Gleichung

$$y = mx + q$$

gegebenen Linie parallel ist.

Aufl. Durch eine Entwicklung, welche mit der für die Ellipse in der Anm. zu §. 77 ausgeführten volle Aehnlichkeit hat, findet man

$$x_1 = \pm \frac{a^2m}{\sqrt{(a^2m^2 - b^2)}} \text{ und } y_1 = \pm \frac{b^2}{\sqrt{(a^2m^2 - b^2)}}.$$

Damit die Aufgabe zu lösen ist, muß folglich $m^2 > \frac{b^2}{a^2}$, also der (spitze) Winkel, unter welchem die gegebene Linie die Abscissenaxe schneidet, größer, als der Winkel sein, welchen die Asymptote mit der Abscissenaxe bildet, wie auch bereits in §. 117 gezeigt ist. Unter der angegebenen Voraussetzung existiren allemal zwei Berührungspunkte, also auch zwei der gegebene Linie parallele Tangenten, von denen die eine den einen Hyperbelast, die andere den gegenüberliegenden Hyperbelast berührt. Da nämlich die Abscissen und eben so die Ordinaten der beiden Berührungspunkte entgegengesetzte Vorzeichen haben, so liegen die Berührungspunkte entweder in der ersten und dritten oder in der zweiten und vierten Region, je nachdem m positiv oder negativ ist.

2) Aus den Coordinaten eines Punktes c, d die Coordinaten x_1, y_1 des Punktes zu finden, in welchem eine durch denselben gezogene Tangente die Hyperbel berührt.

Aufl. Wir erhalten zur Berechnung von x_1 und y_1 zunächst die Gleichungen

$$1)\quad a^2y_1d - b^2x_1c = - a^2b^2$$

und

$$2)\quad a^2y_1^2 - b^2x_1^2 = - a^2b^2.$$

Eliminiren wir zwischen diesen Gleichungen y_1, so bekommen wir weiter

$$3)\quad (b^2c^2 - a^2d^2)x_1^2 - 2a^2b^2cx_1 = - a^4(b^2 + d^2).$$

Durch Auflösung dieser Gleichung ergibt sich

$$4)\quad x_1 = \frac{a^2(b^2c \pm d\sqrt{a^2d^2 - b^2c^2 + a^2b^2})}{b^2c^2 - a^2d^2}$$

und folglich

$$5)\quad y_1 = \frac{b^2(a^2d \pm c\sqrt{a^2d^2 - b^2c^2 + a^2b^2})}{b^2c^2 - a^2d^2}.$$

Wenn wir uns in der folgenden Erörterung um größerer Einfachheit willen auf die Annahme beschränken, daß der fragliche Punkt in der ersten Region liegt, also die Coordinaten desselben c und d positiv sind, so wird dies unbeschadet der Allgemeinheit der Betrachtung geschehen können, da sich die nämlichen Schlüsse sehr leicht auf jede der drei andern Regionen übertragen lassen. — Ist nun zunächst

$$a^2d^2 - b^2c^2 + a^2b^2 < 0,$$

liegt also zufolge der Anmerkung zu §. 111 der gegebene Punkt innerhalb des von dem Hyperbelaste AGZ, Fig. 49, umschlossenen Raumes, so werden die Werthe von x_1 und y_1 imaginär, und die Aufgabe ist nicht zu lösen. — Ist ferner

$$a^2d^2 - b^2c^2 + a^2b^2 = 0$$

und liegt folglich der gegebene Punkt auf der Hyperbel, so vereinfachen sich die obigen Werthe in

$$x_1 = c \text{ und } y_1 = d;$$

es läßt sich daher durch einen auf einem Hyperbelaste gelegenen Punkte allemal nur eine einzige Tangente ziehen. — Ist endlich

$$a^2d^2 - b^2c^2 + a^2b^2 > 0,$$

und liegt daher der (in der ersten Region) gegebene Punkt außerhalb des von dem Hyperbelaste AGZ umschlossenen Raumes, so liefern uns unter der Voraussetzung, daß der Nenner $b^2c^2 - a^2d^2$ nicht verschwindet, die obige Gleichungen so wohl für die Abscisse x_1, als auch für die Ordinate y_1 zwei reelle Werthe; es lassen sich daher durch jeden außerhalb des von dem Hyperbelaste AGZ umschlossenen Raumes liegenden Punkt allemal zwei Tangenten an die Hyperbel ziehen, mit einziger Ausnahme eines Falles, wenn nämlich $ad = bc$ ist, also der gegebene Punkt auf der Asymptote liegt, wovon noch weiter unten besonders gehandelt werden soll. Liegt der gegebene Punkt zwischen dem Hyperbelaste und der Asymptote CO, so ist $ad < bc$, und die Werthe von x_1 sind dann beide positiv. Es ist nämlich unter der angegebenen Voraussetzung $b^2c^2(b^2 + d^2) > a^2d^2(b^2 + d^2)$,

also auch $b^4c^2 > d^2(a^2d^2 - b^2c^2 + a^2b^2)$

und daher auch der zweite Werth von x_1 positiv. In Betreff des Werthes von y_1, bei welchem vor der Wurzel das Minuszeichen steht, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $c >$ oder $< a$ ist. Im ersten Falle ist

$$b^2c^2(c^2 - a^2) > a^2d^2(c^2 - a^2)$$

und daher $a^4d^2 > c^2(a^2d^2 - b^2c^2 + a^2b^2)$;

im andern Falle ist $a^2d^2(a^2 - c^2) < b^2c^2(a^2 - c^2)$,

also $a^4d^2 < c^2(a^2d^2 - b^2c^2 + a^2b^2)$.

Im ersten Falle ist folglich der zweite Werth von y_1 positiv, im andern negativ. Demnach berühren die Tangenten, welche von einem zwischen dem Hyperbelaste und der Asymptote gelegenen Punkte ausgehen, beide den nämlichen Hyperbelast und die Berührungspunkte liegen beide auf der nämlichen Seite oder (wie für den Punkt K, Fig. 49) auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenaxe, je nachdem $c >$ oder $< a$. Ist $c = a$, so verschwindet der zweite Werth von y_1 und der Berührungspunkt der dem zweiten Werthe von y_1 entsprechenden Tangente fällt in den Scheitel A. — In einer der vorstehenden Entwicklung ganz ähnlichen Weise läßt sich zeigen, daß, wenn der Punkt K', Fig. 49, von welchem aus zwei Tangenten an die Hyperbel gezogen sind, jenseits der Asymptote liegt, die eine Tangente K'G' den einen, die andere K'G'' den gegenüberliegenden Hyperbelast berührt, und daß die Berührungspunkte an die nämliche oder an entgegengesetzte Seiten der Abscissenaxe fallen, je nachdem $c <$ oder $> a$ ist.

Endlich haben wir noch den Fall zu erörtern, wenn der gegebene Punkt auf der Asymptote liegt, also $ad = bc$ ist. In diesem Falle verlieren die Auflösungen (4) und (5) ihre Brauchbarkeit, da sie aus der Gleichung (3) durch Division mit Null erhalten worden sind. Diese Gleichung vereinfacht sich aber unter der angegebenen Voraussetzung in

$$2a^2b^2cx_1 = a^4(b^2 + d^2),$$

woraus sich

$$x_1 = \frac{a^2b^2 + a^2d^2}{2b^2c} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2}{2b^2c} = \frac{a^2 + c^2}{2c}$$

und

$$y_1 = \frac{b(c^2 - a^2)}{2ac}$$

ergibt. Aus einem auf der Asymptote gelegenen Punkte läßt sich folglich nur eine Tangente an die Hyperbel ziehen; die andere wird durch die Asymptote ersetzt. — Fiele der gegebene Punkt in den Durchschnittspunkt der Asymptoten, wären also c und d beide gleich Null, so würden die zuletzt für x_1 und y_1 erhaltenen Werthe unendlich groß, und an die Stelle der Tangenten träten die Asymptoten.

C. Die Durchmesser der Hyperbel.

*§. 119. Lehrsatz.

1) Die Mitten paralleler Sehnen GG', HH'..., Fig. 49, liegen auf einem Durchmesser, d. h. auf einer durch den Mittelpunkt C der Hyperbel gehenden geraden Linie CLL'...

2) Wenn durch die Endpunkte einer Sehne GG' zwei sich schneidende Tangenten gezogen sind, so liegt auch der Durchschnittspunkt K der Tangenten auf dem die Sehne halbirenden Durchmesser.

Die Beweise dieser beiden Sätze werden eben so geführt, wie die der gleichlautenden Sätze von der Ellipse (§. 78) mit der alleinigen Abänderung, daß man überall in den dort aufgeführten Gleichungen $-b^2$ statt $+b^2$ setzt.

Bezeichnen wir daher mit α den Winkel, welchen der Durchmesser CD, und mit β den Winkel, welchen die Sehne GG' mit der Abscissenaxe bildet, so erhalten wir zufolge der dort ausgeführten Entwicklungen die Gleichung

$$\text{tang}\,\alpha\,.\,\text{tang}\,\beta = \frac{b^2}{a^2}.$$

Endlich wollen wir noch besonders darauf aufmerksam machen, daß in den obigen Sätzen unter einer Sehne eben so wohl eine Linie verstanden werden kann, welche zwei auf dem nämlichen Hyperbelaste liegende Punkte, als auch eine solche, welche zwei Punkte, die auf verschiedenen Hyperbelästen liegen, mit einander verbindet.

Da bei der gleichseitigen Hyperbel $a = b$ ist, so ergänzen sich folglich bei derselben die Winkel α und β zu einem rechten.

*§. 120. Zusatz.

Da zufolge des vorherg. §. die in §. 78 von der Ellipse erwiesenen Sätze auch von der Hyperbel gelten, so müssen auch die aus jenen Sätzen in §. 79 gezogenen Folgerungen für die Hyperbel Giltigkeit haben. Wir heben insbesondere die folgenden hervor:

1) Die durch einen Endpunkt D des Durchmessers CD gezogene Tangente MN, Fig. 49, ist den von diesem Durchmesser halbirten Sehnen parallel.

2) Durch die Tangente wird die Richtung angegeben, welche die Hyperbel im Berührungspunkte hat.

*§. 121. Zusatz.

Die Stücke GH und GK der Tangente HK, welche zwischen den Berührungspunkt G und die Einschnittspunkte H und K in die Asymptoten fallen, sind einander gleich (Fig. 50).

Bew. Denn wenn wir irgend eine Sehne LM der Tangente KH parallel ziehen und dieselbe über beide Endpunkte verlängern, bis sie die Asymptoten in N und O schneidet, so wird die Sehne LM in dem Punkte P, in welchem sie von dem verlängerten Durchmesser CG durchschnitten wird, nach dem vorherg. §. halbirt, und da nach §. 115 LN = OM ist, so ist auch PN = PO und folglich auch GH = GK.

Der vorstehende Satz liefert noch ein sehr einfaches Verfahren, durch einen auf der Hyperbel gegebenen Punkt G eine Tangente zu ziehen. Macht man nämlich

EG || CK, so ist wegen GH = GK auch CE = EH. Um also die durch den Punkt G gehende Tangente zu erhalten, zieht man durch denselben mit einer Asymptote eine Parallele EG und macht EH = CE; dann ist GH die gesuchte Tangente.

Bezeichnen wir mit 2ω den Winkel, welchen die Asymptoten mit einander bilden, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks CHK = $\frac{1}{2}$ CH . CK . sin 2ω = 2CE . EG sin $2\omega = \frac{1}{2}c^2 \sin 2\omega$ (§. 114). Es hat daher für jeden Punkt der Hyperbel das von der zugehörigen Tangente und den Asymptoten eingeschlossene Dreieck beständig denselben Inhalt.

*§. 122. Aufgabe.

Die Größe eines die Hyperbeläste schneidenden Durchmessers zu berechnen, wenn der Winkel α gegeben ist, welchen derselbe mit der Hauptaxe der Hyperbel bildet.

Aufl. Bezeichnen wir die Hälfte des gesuchten Durchmessers mit A, so erhalten wir durch das nämliche Verfahren, welches wir für die ähnlich lautende Aufgabe bei der Ellipse (§. 81) angewandt haben

$$A^2 = \frac{-a^2b^2}{a^2 \sin \alpha^2 - b^2 \cos \alpha^2} = \frac{a^2b^2}{b^2 \cos \alpha^2 - a^2 \sin \alpha^2}.$$

*§. 123. Zusatz.

Zufolge der im vorherg. §. erhaltenen Gleichung wird A am kleinsten = a für $\alpha = 0$; wächst α, so nimmt auch A zu, da der Cosinus abnimmt und der Sinus wächst, wenn der Winkel wächst. Ist tang $\alpha = \frac{b}{a}$, also $\alpha = \omega$, so wird $A = \infty$, indem dann der Durchmesser mit der Asymptote zusammenfällt. Nimmt man $\alpha > \omega$, also tang $\alpha > \frac{b}{a}$ an, so wird A imaginär; die durch den Mittelpunkt gezogene Linie schneidet dann nicht mehr in die Hyperbeläste ein.

*§. 124. Zusatz.

Wenn wir uns von dem einen Hyperbelaste nach dem andern Sehnen parallel irgend einem Durchmesser der Hyperbel DD′, Fig. 51, gezogen denken, so zeigt eine in ähnlicher Weise wie oben bei der Ellipse (§. 80) angestellte Betrachtung, daß dieselbe von einer durch den Mittelpunkt C gehenden Linie VV′, welche den von DD′U halbirten Sehnen parallel ist, halbirt werden. Man pflegt diese in die Hyperbeläste nicht einschneidende Linie VV′ ebenfalls einen Durchmesser zu nennen, und in gleicher Weise, wie bei der Ellipse werden zwei Durchmesser conjugirt genannt, wenn der eine die dem andern parallelen Sehnen halbirt.

Weiter läßt sich eben so wie bei der Ellipse zeigen, daß, wenn man einen Punkt E auf der Hyperbel mit den Endpunkten irgend eines Durchmessers, z. B. AB, verbindet und zu den entstandenen Ergänzungssehnen AE und BE parallele Durchmesser DD′ und VV′ zieht, dieselben einander conjugirt sind.

Wenn α und β die Winkel bezeichnen, um welche zwei conjugirte Durchmesser von der positiven Richtung der Hauptaxe der Hyperbel abweichen, wo wir, um die Vorstellung zu fixiren, $\alpha < \beta$ annehmen wollen, wenn wir ferner die spitzen Winkel, welche die Asymptoten mit der Hauptaxe bilden, ω nennen, so folgt aus der Gleichung des §. 119

$$\text{tang}\ \alpha\ .\ \text{tang}\ \beta = \frac{b^2}{a^2} = \text{tang}\ \omega^2,$$

daß die Winkel α und β entweder beide spitz oder beide stumpf sind, und daß folglich die conjugirten Durchmesser entweder beide in der ersten und dritten oder beide in der zweiten und vierten Region liegen. Beschränken wir uns auf die Betrachtung des ersten Falles, was unbeschadet der Allgemeinheit geschehen kann, da die Hyperbel durch die beiden Axen in vier symmetrische Stücke getheilt wird, so folgt weiter aus der angeführten Gleichung, daß der kleinere Winkel α allemal $< \omega$, der größere $\beta > \omega$ ist, und daß, wenn der eine wächst, der andere abnimmt. Für $\alpha = 0$ wird $\beta = 90^0$; wenn also der Durchmesser CU, Fig. 51, mit der ersten Axe CX der Hyperbel zusammenfällt, so fällt der conjugirte Durchmesser CV auf die zweite Axe CY und diese beiden Durchmesser schneiden sich folglich rechtwinklig. Wird nun der Durchmesser CU um den Mittelpunkt C aus der Lage CX gegen die Asymptoten CO hin gedreht, so nähert sich auch der conjugirte Durchmesser CV mehr und mehr der Asymptote, bis endlich beide mit derselben zusammenfallen*).

Bezeichnen wir den von den conjugirten Durchmessern CU und CV, Fig. 51, eingeschlossenen Winkel mit γ, dann ist auch BEA $= \gamma$, folglich $\gamma =$ EAX — EBX $= \beta - \alpha$. Da α und β beide spitz sind, so ist um so mehr $\gamma < 90^0$; nur in dem einen Falle, daß $\alpha = 0$ und folglich $\beta = 90^0$ ist, ist auch $\gamma = 90^0$; die beiden Axen 2a und 2b schließen also den größten Conjugationswinkel ein; γ wird dagegen am kleinsten, nämlich $= 0$, wenn $\alpha = \beta = \omega$, also tang $\alpha = \frac{b}{a} =$ tang β ist. (Der Scheitel E des von den Ergänzungssehnen eingeschlossenen Winkels AEB liegt dann in unendlicher Entfernung vom Mittelpunkt C auf der Asymptote.)

Die Hyperbel zeigt hier gerade die umgekehrten Verhältnisse von der Ellipse; bei derselben schlossen (nach §. 87) die beiden Axen 2a und 2b den kleinsten Conjugationswinkel ein, und derselbe wurde am größten, wenn tang $\alpha = \frac{b}{a} = -$ tang β war und die Winkel α und β sich folglich zu einem Flachen ergänzten.

Da bei einer gleichseitigen Hyperbel sich die Asymptoten rechtwinklig durchschneiden, so ist Winkel $\omega = 45^0$ und folglich

$$\text{tang}\ \alpha\ .\ \text{tang}\ \beta = 1.$$

Die Winkel α und β ergänzen sich daher bei der gleichseitigen Hyperbel zu einem Rechten. Ziehen wir von irgend einem Punkte E einer gleichseitigen Hyperbel nach den Endpunkten A und B des mit der ersten Axe zusammenfallenden Durchmessers die Ergänzungssehnen BE und AE, Fig. 51, und parallel zu denselben die conjugirten Durchmesser CU und CV, so ist W. EBX = UCX = α und W. EAX = VCX = β, also zufolge des Obigen

$$\text{EAX} + \text{EBX} = 90^0.$$

Die spitzen Winkel, welche zwei nach den Endpunkten des Hauptdurchmessers gezogene Ergänzungssehnen mit demselben bilden, ergänzen sich also bei der gleichseitigen Hyperbel allemal zu einem Rechten. Dieser Satz bildet eine Analogie zu dem bekannten Kreissatze: „Der Winkel im Halbkreise ist ein rechter", — da in Folge dieses Satzes auch bei dem Kreise die spitzen Winkel, welche zwei Ergänzungssehnen mit einem Durchmesser bilden, zusammen 90^0 betragen, jedoch mit der Verschiedenheit, daß bei der Hyperbel der betreffende Durchmesser mit der ersten Axe zusammenfallen muß, während derselbe beim Kreise ganz willkührlich angenommen werden kann.

*) Streng genommen können dieselben nur als der Asymptote unendlich nahe kommend angenommen werden.

D. Die Gleichung der Hyperbel für schiefwinklige Axen.

*§. 125. Aufgabe.

Die Gleichung der Hyperbel für zwei durch den Mittelpunkt gehende schiefwinklige Axen abzuleiten, wenn die Winkel, welche die Abscissen- und Ordinatenaxe mit der Hauptaxe der Hyperbel bilden, gleich α und β gegeben sind.

Aufl. Bezeichnen wir mit u und v die Coordinaten eines Punktes auf der Hyperbel für das neue Axensystem, mit x und y die Coordinaten des nämlichen Punktes für das bisher behandelte rechtwinklige Axensystem, so ist nach §. 15

$$x = u\cos\alpha + v\cos\beta \text{ und } y = u\sin\alpha + v\sin\beta.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2,$$

so verwandelt sich dieselbe nach einiger Reduction in

$$\left.\begin{array}{l}(a^2\sin\beta^2 - b^2\cos\beta^2)\,v^2 + (a^2\sin\alpha^2 - b^2\cos\alpha^2)\,u^2 \\ \quad + 2(a^2\sin\alpha\sin\beta - b^2\cos\alpha\cos\beta)\,uv\end{array}\right\} = - a^2b^2.$$

*§. 126. Zusatz.

Denken wir uns den Winkel α gegeben, und wählen wir dann den Winkel β so, daß

$$1)\quad \operatorname{tang}\alpha\,.\,\operatorname{tang}\beta = \frac{b^2}{a^2}$$

wird, also zufolge §. 119 und 124 so, daß die schiefwinkligen Coordinatenaxen mit zwei conjugirten Durchmessern zusammenfallen, so verwandelt sich die Gleichung des vorherg. §. in

$$(a^2\sin\beta^2 - b^2\cos\beta^2)\,v^2 + (a^2\sin\alpha^2 - b^2\cos\alpha^2)\,u^2 = - a^2b^2.$$

Nach §. 122 ist

$$2)\quad \frac{-a^2b^2}{a^2\sin\alpha^2 - b^2\cos\alpha^2} = A^2, \text{ also } a^2\sin\alpha^2 - b^2\cos\alpha^2 = \frac{-a^2b^2}{A^2}.$$

Setzen wir in Uebereinstimmung hiermit

$$3)\quad \frac{-a^2b^2}{a^2\sin\beta^2 - b^2\cos\beta^2} = -B^2, \text{ also } a^2\sin\beta^2 - b^2\cos\beta^2 = \frac{a^2b^2}{B^2},$$

so verwandelt sich die zuletzt erhaltene Gleichung, wenn wir diese Werthe einsetzen, in

$$4)\quad A^2v^2 - B^2u^2 = - A^2B^2.$$

Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel hat hiernach, wenn die Coordinatenaxen mit zwei conjugirten Durchmessern zusammenfallen, eine eben so einfache Gestalt, als wenn man die Hauptaxe und die zu derselben senkrechte Nebenaxe zu Coordinatenaxen wählt.

Bezeichnen wir ferner den von den conjugirten Durchmessern eingeschlossenen Winkel mit γ, so erhalten wir durch eine Entwicklung, welche der in §. 83 für die Ellipse ausgeführten ganz ähnlich ist, noch folgende Gleichungen

$$5)\quad A^2 - B^2 = a^2 - b^2$$

und

$$6)\quad AB\sin\gamma = ab.$$

Bezeichnen wir so wie früher den Winkel, welchen die Asymptoten mit der Hauptaxe bilden, mit ω, und denken wir uns den Winkel α von 0 bis ω wachsend, so nimmt vermöge Gleichung (1) der Winkel β von 90^0 bis ω ab, und zugleich wachsen vermöge der Gleichungen (2) und (3)

$$A^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos\alpha^2 - a^2\sin\alpha^2} \text{ und } B^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin\beta^2 - b^2\cos\beta^2}$$

die conjugirten Durchmesser 2A und 2B von 2a und 2b beide bis ins Unendliche. Es sind daher 2a und 2b die kleinsten conjugirten Durchmesser der Hyperbel, und da vermöge Gleichung (6) für alle anderen Durchmesser Winkel $\gamma < 90^0$ ist, die einzigen, welche aufeinander senkrecht stehen (wie wir auch bereits oben in der Anm. zu §. 124 gesehen haben).

Auch hier zeigt die Hyperbel die umgekehrten Verhältnisse von der Ellipse; während bei dieser (zufolge §. 84) der eine conjugirte Durchmesser abnimmt, wenn der andere wächst, nehmen bei der Hyperbel, wie am deutlichsten Gleichung (5) zeigt, beide conjugirte Durchmesser gleichzeitig zu und ab.

Da bei einer gleichseitigen Hyperbel $a = b$ ist, so ist auch $A = B$; die conjugirten Durchmesser sind also bei einer gleichseitigen Hyperbel allemal einander gleich, was wieder an den Kreis erinnert. Bei einer ungleichseitigen Hyperbel ist beständig $A >$ oder $< B$, je nachdem $a >$ oder $< b$ ist.

*§. 127. Zusatz.

Wenn wir in der Gleichung des §. 125 Winkel $\alpha = + \omega$ und $\beta = - \omega$ annehmen, also die Coordinatenaxen so wählen, daß sie mit den Asymptoten zusammenfallen, so verwandelt sich jene Gleichung in

$$2(a^2 \sin \omega^2 + b^2 \cos \omega^2)\, uv = a^2b^2,$$

oder da $\sin \omega = \dfrac{b}{c}$ und $\cos \omega = \dfrac{a}{c}$ ist,

$$uv = \frac{1}{4}c^2,$$

eine Gleichung, zu welcher wir bereits durch eine andere Ableitung in §. 114 gelangt sind.

Aus der Gleichung (4) des §. 126

$$A^2v^2 - B^2u^2 = - A^2B^2$$

ergibt sich das Resultat

$$v = \pm \frac{B}{A}\sqrt{u^2 - A^2},$$

zufolge dessen die Ordinate v zwei reelle Werthe erhält, verschwindet oder imaginär wird, je nachdem $u^2 >$ oder $=$ oder $< A^2$ ist. Eine unter dem Winkel β gegen die erste Axe der Hyperbel geneigte Linie kann dieselbe daher in zwei Punkten schneiden, berühren oder gar nicht treffen.

Vermöge Gleichung (2) ist

$$A^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 \cos \alpha^2 - a^2 \sin \alpha^2}.$$

Diese Gleichung liefert für A^2 einen negativen Werth, wenn $a^2 \sin \alpha^2 > b^2 \cos \alpha^2$, also $\tang \alpha > \dfrac{b}{a}$ und folglich vermöge Gleichung (1) $\tang \beta < \dfrac{b}{a}$, d.h. $\alpha > \omega$ und $\beta < \omega$ ist, indem wir uns in Uebereinstimmung mit §. 124, Anm. unbeschadet der Allgemeinheit der Untersuchung auf die Annahme beschränken, daß die Winkel α und β beide spitz sind. So lange also $\beta < \omega$ ist,*) erhält die Ordinate v allemal zwei reelle

*) In Fig. 51 würde dieser Annahme entsprechend CU die Ordinatenaxe und CV die Abscissenaxe, GH eine Ordinate, CH die zugehörige Abscisse vorstellen.

Werthe; eine jede Linie, welche mit der ersten Axe einen kleinern Winkel bildet, als die Asymptote, schneidet folglich die Hyperbel in zwei Punkten (G und G'', Fig. 51), welche auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenaxe (VV') und folglich auch auf verschiedenen Hyperbelästen liegen, da die beiden Werthe der Ordinate im Vorzeichen verschieden sind.

Ist $\alpha = \beta = \omega$, so erhalten wir nach §. 127 zwischen u und v die Gleichung

$$uv = \tfrac{1}{4}c^2,$$

und da diese Gleichung für jeden Werth von u einen reellen Werth für v liefert, so muß folglich jede den Asymptoten parallele Linie die Hyperbel in einem Punkte schneiden.

Wenn endlich $\beta > \omega$, also $\alpha < \omega$*) ist, so ist A^2 positiv; es kann daher die Ordinate v zufolge der obigen Gleichung eben so wohl zwei reelle, als auch zwei imaginäre Werthe erhalten oder verschwinden. Wenn also der spitze Winkel, unter welchem eine Linie die erste Axe der Hyperbel schneidet, größer ist, als der von der Asymptote und der ersten Axe gebildete spitze Winkel, so kann dieselbe die Hyperbel eben so wohl in zwei Punkten schneiden, als auch in einem Punkte berühren oder gar nicht treffen, je nachdem das Quadrat u^2 ($= CK^2$) der Abscisse des Punktes, in welchem sie die Abscissenaxe (CU, Fig. 51) schneidet, größer oder eben so groß oder kleiner, als A^2 ($= CD^2$, Fig. 51) ist. Da wir Winkel $\beta > \omega$ vorausgesetzt haben, so können die beiden Durchschnittspunkte (G und G', Fig. 51) nur auf dem nämlichen Hyperbelaste angetroffen werden.

Insbesondere geht aus dem Vorstehenden der Satz hervor, daß eine gerade Linie mit der Hyperbel niemals mehr, als zwei Punkte gemeinschaftlich haben kann.

E. Die Scheitelgleichung der Hyperbel.

§. 128. Erklärung.

Die durch den Brennpunkt F gehende und zur Hauptaxe senkrechte Sehne PP', Fig. 52, wird bei der Hyperbel eben so, wie bei der Ellipse und Parabel, der **Parameter** genannt und im Folgenden mit 2p bezeichnet werden.

§. 129. Zusatz.

Wenn wir in der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

x = c setzen, so wird zufolge der vorstehenden Erklärung y = p. Durch diese Substitution verwandelt sich aber die aufgeführte Gleichung in

$$a^2p^2 - b^2c^2 = -a^2b^2,$$

woraus sich

$$p^2 = \frac{b^2(c^2 - a^2)}{a^2} = \frac{b^4}{a^2},$$

also

$$2p = \frac{2b^2}{a}$$

ergibt. — Formen wir diese Gleichung um in die Proportion

$$2p : 2b = 2b : 2a,$$

*) Dieser Annahme entsprechend werden wir uns in Fig. 51 CU als Abscissen-, CV als Ordinatenaxe, GK als Ordinate und CK als zugehörige Abscisse vorstellen.

so folgt aus derselben, daß bei der Hyperbel, eben so wie bei der Ellipse (§. 91), die zweite Axe (2b) die mittlere Proportionale zwischen der ersten Axe (2a) und dem Parameter (2p) ist.

Bei der gleichseitigen Hyperbel ist der Parameter (PP′) der ersten Axe (AA′) gleich, was wieder an den Kreis erinnert.

§. 130. Lehrsatz.

Wenn wir den Scheitel A, Fig. 52, als Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten und die Hauptaxe als Abscissenaxe, ferner die Richtung vom Mittelpunkte nach diesem Scheitel hin als die Richtung der positiven Abscissen annehmen, so erhalten wir für die Hyperbel folgende Gleichung:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

welche die Scheitelgleichung der Hyperbel heißt.

Beweis. Bezeichnen wir für irgend einen Punkt G auf der Hyperbel die auf den Mittelpunkt C als Anfangspunkt bezogene Abscisse CH mit x_1, die auf den Scheitel A als Anfangspunkt bezogene Abscisse AH mit x und die für beide Annahmen gleiche Ordinate GH mit y, so ist

$$x_1 = x + a.$$

Setzen wir diesen Werth in die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$$

ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$a^2y^2 - b^2(x + a)^2 = - a^2b^2,$$

also

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2).$$

§. 131. Zusatz.

Wenn wir in der so eben erhaltenen Gleichung zufolge §. 129 $b^2 = ap$ setzen, so verwandelt sich dieselbe in

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a^2}.$$

Während also das Quadrat der Ordinate bei der Parabel beständig gleich dem Rechtecke aus dem Parameter und der Abscisse und bei der Ellipse kleiner, als dieses Rechteck ist, ist dagegen bei der Hyperbel das Quadrat der Ordinate größer, als das Rechteck aus dem Parameter und der Abscisse, wovon sich der Name Hyperbel schreibt.

Wenn wir uns den Parameter 2p der Größe nach und den Scheitel A. Fig. 52, der Lage nach als fest gegeben, die erste Axe 2a aber als wachsend denken, so nimmt in der Gleichung

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a^2}$$

das letzte Glied $\frac{px^2}{a^2}$ für gleiche Werthe der Abscisse um so mehr ab, der Scheitel A′ des zweiten Hyperbelastes rückt um so weiter hinaus, der Winkel, welchen die Asymptoten einschließen, nimmt vermöge der Gleichung

$$\tang \omega = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{ap}}{a} = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

um so mehr ab, je größer wir die erste Axe 2a annehmen. Denken wir uns dieselbe unendlich groß, so geht die Gleichung der Hyperbel in die Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2px$$

über, der Scheitel A' rückt ins Unendliche hinaus, der Winkel ω verschwindet und die Asymptoten werden einander parallel; und in der That nähern sich, wie wir oben in §. 50 gesehen haben, die unendlichen Aeste der Parabel mehr und mehr der parallelen Richtung. Die Parabel erscheint also nicht bloß als ein besonderer Fall der Ellipse, sondern auch der Hyperbel.

Wenn die erste Axe der Hyperbel = 2a und der Parameter = 2p gegeben sind, so erhalten wir zur Berechnung der linearen Excentricität c die Gleichungen

$$b^2 = ap \text{ (§. 129) und } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + ap},$$

woraus sich

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{p}{a}}$$

ergibt. Wie wir oben gesehen haben, geht die Hyperbel, wenn der Parameter 2p einer gegebenen Linie gleich ist, die erste Axe 2a aber unendlich groß angenommen wird, in die Parabel über und zufolge der eben erhaltenen Gleichung wird für diese Annahme die Excentricität e = 1. Wir können daher die Parabel auch als eine Hyperbel, deren Excentricität der Einheit gleich ist, definiren.

§. 132. Zusatz.

Wenn wir die Richtungen zweier conjugirten Durchmesser als Coordinatenaxen und den Punkt, in welchem der positive Schenkel der einen die Hyperbel schneidet, als Anfangspunkt der Coordinaten annehmen, ferner die dieser parallelen Abscissen mit u, die der andern parallelen Ordinaten mit v bezeichnen, so geht die Gleichung (4) des §. 126 in die folgende über:

$$v^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Au + u^2),$$

wo die Buchstaben A und B die dort angegebene Bedeutung haben. Setzen wir in dieser Gleichung $\frac{B^2}{A} = P$, so verwandelt sich dieselbe in

$$v^2 = 2Pu + \frac{Pu^2}{A}.$$

§. 133. Lehrsatz.

Wenn die Coordinatenaxen den beiden Axen der Hyperbel parallel laufen, der Anfangspunkt der Coordinaten aber in einen Punkt fällt, dessen Coordinaten gleich α und β gegeben sind, so erhält die Gleichung der Hyperbel folgende Form

$$a^2(y - \beta)^2 - b^2(x - \alpha)^2 = - a^2b^2.$$

Beweis s. §. 94 und 30.

F. Die Gleichung der Hyperbel für Polarcoordinaten.

§. 134. Aufgabe.

Die Gleichung der Hyperbel für Polarcoordinaten abzuleiten, wenn ein Brennpunkt als Pol und der durch diesen hindurchgehende

Schenkel der Hauptaxe der Hyperbel als Axe der Polarcoordinaten angenommen wird.

Aufl. Bezeichnen wir für irgend einen Punkt G, Fig. 52, auf dem Hyperbelaste, welcher den als Pol angenommenen Brennpunkt F einschließt, den Radius vector FG mit r, die Anomalie GFH mit φ, die Abscisse dieses Punktes CH mit x, wenn der Mittelpunkt als Anfangspunkt und die Hauptaxe der Hyperbel als Abscissenaxe angenommen wird, so ist

$$x \, (= CH = CF + FH) = c + r \cos \varphi = ae + r \cos \varphi.$$

Nach §. 107, a ist aber

$$r = ex - a.$$

Durch Elimination von x erhalten wir aus diesen beiden Gleichungen

$$1) \; r = \frac{a\,(e^2 - 1)}{1 - e \cos \varphi}.$$

Denken wir uns dagegen einen Punkt G′ Fig. 52, auf dem andern Hyperbelaste gegeben, und haben für denselben r, φ, x die nämliche Bedeutung, wie in dem eben behandelten Falle, so ist zufolge §. 107

$$r = -ex + a,$$

folglich, wenn x eliminirt wird,

$$2) \; r = \frac{-a\,(e^2 - 1)}{1 + e \cos \varphi}.$$

Bezeichnen wir mit ω den Winkel, welchen die Asymptote mit der Hauptaxe der Hyperbel bildet, so ist $\cos \omega = \frac{a}{c} = \frac{1}{e}$. Wenn wir daher in der Gleichung (1) des vorherg. §. $\varphi = \omega$ setzen, so wird $r = \infty$. So lange der positive oder negative Werth von $\varphi > \omega$, (aber $< 360^0 - \omega$) ist, erhält r in Gleichung (1) einen endlichen und positiven Werth. Dasselbe gilt in Hinsicht der Gleichung (2), so lange r zwischen den Grenzen $180^0 - \omega$ und $180^0 + \omega$ liegt. Wird dagegen in Gleichung (1) $\varphi < \pm \omega$ oder in Gleichung (2) $\varphi < 180^0 - \omega$ oder $> 180^0 + \omega$ angenommen, so wird der zugehörige Werth von r negativ. In allen diesen Fällen, in welchen Gleichung (1) oder (2) für r einen negativen Werth liefert, schneidet der Radius vector in den Hyperbelast nicht ein, für welchen die betreffende Gleichung aufgestellt worden ist. Der negative Werth von r gibt aber absolut genommen den Abstand des Punktes, in welchem der rückwärts verlängerte Radius den gegenüberliegenden Hyperbelast schneidet, vom Brennpunkte an, wie leicht daraus erhellt, daß Gleichung (1) in Gleichung (2) übergeht, wenn man in derselben $180^0 + \varphi$ statt φ und $-r$ statt $+r$ schreibt. Es kann daher so wohl Gleichung (1), als (2) zur Darstellung sämmtlicher Punkte beider Hyperbeläste dienen, wenn man die negativen Werthe von r nicht auf dem Radius vector selbst, sondern auf der über den Brennpunkt (Pol) fortgesetzten Verlängerung desselben aufträgt.

G. Die Hyperbel als geometrischer Ort auf den Brennpunkt und die Directrix bezogen.

§. 135. Erklärung.

Eine zur Hauptaxe der Hyperbel senkrechte Linie DJ, Fig. 52, welche dieselbe in einem Abstande vom Scheitel A durchschneidet, welcher sich zu der Entfernung des Scheitels A von dem ihm zunächst liegenden Brennpunkte F

wie die halbe erste Axe zur linearen Excentricität verhält, wird die zu diesem Brennpunkte gehörende Directrix genannt.

§. 136. Lehrsatz.

Für jeden Punkt auf der Hyperbel ist das Verhältniß seiner Entfernung vom Brennpunkte zu der Entfernung von der Directrix der numerischen Exentricität e gleich.

Beweis. Zufolge des vorherg. §. ist zunächst für den Scheitel A, Fig. 52

$$AF : AD = c : a = e.$$

Nehmen wir ferner auf dem den Brennpunkt F umschließenden Hyperbelaste einen beliebigen Punkt G an, setzen wir der Kürze wegen den Abstand desselben von der Directrix GE = d, den Radius vector FG = r und die Abscisse CH = x, dann erhalten wir die Gleichung

$$d = GE = AD + AH = AD + x - a.$$

So eben haben wir gefunden

$$AD = \frac{AF}{e} = \frac{c-a}{e} = \frac{ae-a}{e} = a - \frac{a}{e},$$

woraus

$$d = x - \frac{a}{e} = \frac{ex-a}{e}$$

hervorgeht, und da zufolge §. 127, a

$$r = ex - a$$

ist, so ergibt sich

$$r : d = e.$$

Ist ferner ein Punkt G' auf dem andern Hyperbelaste gegeben, und bezeichnen wir den Abstand desselben von der Directrix G'E mit d', den Radius vector FG' aber mit r und die negative Abscisse — CH' mit x, so haben wir zunächst die Gleichung

$$d' = G'E = AH' - AD = AC + CH' - AD$$

$$= a - x - a + \frac{a}{e} = \frac{a-ex}{e},$$

und da nach §. 107, b

$$r = a - ex$$

ist, folglich

$$r : d' = e.$$

1. Nach §. 34 und 97 ist bei der Parabel das Verhältniß r : d beständig der Einheit, bei der Ellipse immer dem nämlichen ächten Bruche und bei der Hyperbel ist, wie wir so eben gesehen haben, dieses Verhältniß immer demselben die Einheit übersteigenden Bruche gleich. Es würden sich daher die drei Kegelschnitte in die Definition eines geometrischen Ortes zusammenfassen lassen, dessen Abstände von einer geraden Linie und einem außerhalb derselben gegebenen Punkte beständig in dem nämlichen Verhältnisse zu einander stehen, wenn diese Definition nicht an dem wesentlichen Mangel litte, daß in dieselbe der Kreis nicht mit eingeschlossen ist (§. 98).

2. Bezeichnen wir für alle drei Kegelschnitte den halben Parameter mit p, den Abstand des Scheitels am Brennpunkte mit f und die numerische Excentricität mit e, so ist bei der Parabel bekanntlich

$$f = \frac{1}{2}p.$$

Bei der Ellipse ist

$$f = a(1 - e) \text{ und } p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2),$$

folglich

$$f = \frac{p}{1 + e},$$

und bei der Hyperbel ist

$$f = c - a = a(e - 1) \text{ und } p = \frac{b^2}{a} = a(e^2 - 1),$$

also auch bei dieser

$$1)\quad f = \frac{p}{1 + e}.$$

Die nämliche Gleichung gilt daher sowohl für die Ellipse, als auch für die Hyperbel, und sie umfaßt auch die Parabel, wenn wir bei dieser $e = 1$ (§. 93 und 131) setzen. Es lehrt aber diese Gleichung, daß bei allen drei Kegelschnitte der Abstand f des Scheitels vom Brennpunkte kleiner, als der halbe Parameter oder höchstens eben so groß ist, (das letztere beim Kreise, bei welchem $e = 0$ ist).

Nehmen wir zunächst für eine Ellipse f und p als gegeben an, so ergibt sich für dieselbe aus Gleichung (1)

$$2)\quad e = \frac{p}{f} - 1$$

und dann weiter

$$3)\quad a = \frac{f}{1 - e} = \frac{f^2}{2f - p},$$

ein Ausdruck, welchen wir wegen des Folgenden noch in dieser Art umformen

$$4)\quad a = p + \frac{(p - f)^2}{2f - p}.$$

Denken wir uns für irgend einen Kegelschnitt die Endpunkte B und C, Fig. 53, des Parameters festgestellt, dagegen den Scheitel A, A′, A″ als veränderlich, so darf zufolge des Obigen, wenn durch die drei Punkte unter den angegebenen Bedingungen (BC Parameter, A Scheitel) überhaupt ein Kegelschnitt möglich sein soll, höchstens $f = p$, also $AF = \frac{1}{2}BC$ sein, was bekanntlich beim Kreise der Fall ist. Es hat daher bei diesem verhältnißmäßig der Scheitel A den größten Abstand von dem Parameter BC. Halbiren wir AF in D, und legen wir den Scheitel zwischen A und D nach A′, so ist $f < p$ und folglich der durch B, A′, C zu legende Kegelschnitt eine Ellipse. Je mehr sich der Scheitel A′ dem Punkte D nähert, je näher folglich f dem Grenzwerthe $\frac{1}{2}p$ kommt, um so größer wird vermöge Gleichung (2) die Excentricität e und vermöge Gleichung (4) die erste Axe $2a$ dieser Ellipse, um so weiter rückt also auch der Mittelpunkt derselben hinaus. Fällt der Scheitel in D, und ist folglich $f = \frac{1}{2}p$, so ist $e = 1$ und $a = \infty$, und die Ellipse geht in eine Parabel über. Während sich also der Scheitel von A nach D bewegt hat, ist der Mittelpunkt von F bis ins Unendliche hinaus gerückt. Legen wir den Scheitel zwischen D und F nach A″, so ist $f < \frac{1}{2}p$, folglich nach Gleichung (2) $e > 1$. Der durch A″, B, C gehende Kegelschnitt ist also eine Hyperbel. Da die Gleichung (3) für die erste Axe derselben einen negativen Werth liefert, so liegt der Mittelpunkt dieser Hyperbel an der negativen Seite des Parameters BC, und er fällt um so weiter hinaus, je weniger der Scheitel A″ von D entfernt, je weniger also f von $\frac{1}{2}p$ verschieden ist, wie man leicht erkennt, wenn man die Gleichung (3) in folgender Weise schreibt

$$5)\quad a = -\left(\frac{f}{\frac{p}{f} - 2}\right).$$

Nähert sich dagegen der Scheitel A'' dem Brennpunkte F, so wächst in Gleichung (2) die Excentricität e, und der negative Werth von a in Gleichung (5) nimmt ab; die beiden Hyperbeläste rücken also immer näher zusammen. Verlegt man den Scheitel A'' in den Brennpunkt F, setzt man also $f = 0$, so wird die Excentricität e unendlich groß, während die erste Axe $2a$ verschwindet, und die Hyperbel geht in eine die Punkte B und C durchschneidende gerade Linie über.

3. Wenn wir den Scheitel A und den Brennpunkt F, Fig. 53, als fest gegeben annehmen, und uns verschiedene Ellipsen, verschiedene Hyperbeln und eine Parabel construirt denken, welche sämmtlich A zum Scheitel und F zum Brennpunkt haben, wenn wir ferner den Abstand des Brennpunktes F vom Scheitel A mit f bezeichnen, so haben wir in der Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2px$$

$p = 2f$ zu setzen, ferner in der Scheitelgleichung der Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

$b^2 = a^2(1 - e^2)$ und $a(1 - e) = f$, also $a = \dfrac{f}{1 - e}$ und in der Scheitelgleichung der Hyperbel

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

$b^2 = a^2(e^2 - 1)$ und $a(e - 1) = f$, also $a = \dfrac{f}{e - 1}$.

Wir erhalten so folgende Gleichungen

für den Kreis	$y^2 = 2fx - x^2$
für die Ellipse	$y^2 = 2(1 + e)fx - (1 - e^2)x^2$
für die Parabel	$y^2 = 4fx$
für die Hyperbel	$y^2 = 2(e + 1)fx + (e^2 - 1)x^2$.

Für gleiche Werthe der Abscisse x ist daher die Ordinate des Kreises am kleinsten, kleiner, als die sämmtlicher Ellipsen, die Ordinate der Ellipse allemal kleiner, als die der Parabel und diese wieder kleiner, als die Ordinate einer jeden Hyperbel. Die Ordinate der Ellipse fällt um so kleiner aus, je kleiner die Excentricität, eben so die Ordinate der Hyperbel um so größer, je größer die Exentricität ist. — Unter den angegebenen Bedingungen (A Scheitel, F Brennpunkt) wird daher der Kreis von allen anderen Kegelschnitten umschlossen, die Parabel schließt sämmtliche Ellipsen ein, und sie selbst wird wieder von sämmtlichen Hyperbeln umschlossen. Die Ellipsen mit größerer Excentricität schließen die mit kleinerer Excentricität ein; dasselbe gilt eben so von den Hyperbeln.

Wenn unsere Absicht dahin geht, durch die vorstehenden Entwicklungen den verschiedenartigen Verlauf der verschiedenen Gattungen von Kegelschnitten dem Leser zu verdeutlichen, so möchten wir demselben doch noch zur Veranschaulichung die Zeichnung einer Figur empfehlen, welche unter den angegebenen Bedingungen die verschiedenen, im Vorstehenden verglichenen Arten von Kegelschnitten umfaßt.

Siebenter Abschnitt.

Von den Linien der zweiten Ordnung.

A. Von der Gleichung des zweiten Grades im allgemeinen.

§. 137. Erklärung.

Eine Linie heißt von der ersten oder zweiten Ordnung, wenn sie einer Gleichung des ersten oder zweiten Grades angehört.

Bemerkung. Ehe wir die allgemeine Gleichung des zweiten Grades

$$Ay^2 + Bx^2 + Cxy + Dy + Ex + F = 0$$

erörtern, heben wir noch einige einfachere Fälle hervor.

§. 138. Lehrsatz.

Die Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y

$$y^2 = mx + nx^2$$

umfaßt sämmtliche Kegelschnitte.

Beweis. Wir haben hier zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem m gleich Null oder von Null verschieden ist. Nehmen wir zunächst an, daß

I) m nicht Null ist, so werden wir uns in der folgenden Erörterung auf die Behandlung des Falles beschränken können, daß m positiv ist, da im entgegengesetzten Falle, wenn m negativ sein sollte, ganz dasselbe von negativen Abscissen Giltigkeit hat, was anderen Falles von positiven Abscissen gilt, und eben so umgekehrt in diesem Falle das nämliche von negativen, was in jenem von positiven Abscissen gilt.

Unter der Voraussetzung nun, daß m positiv ist, haben wir in Beziehung auf n wiederum drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $n >$ oder $=$ oder < 0 ist. Ist zunächst

1) $n = 0$, so vereinfacht sich die gegebene Gleichung in

$$y^2 = mx,$$

und diese Gleichung fällt mit der Scheitelgleichung der Parabel (§. 45)

$$y^2 = 2px$$

zusammen, wenn wir den Parameter $2p = m$ annehmen.

2) Wenn n negativ $= -n'$ ist, so stimmt unsere Gleichung

$$y^2 = mx - n'x^2$$

mit der Scheitelgleichung der Ellipse (§. 93)

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$$

überein, wenn wir $p = \frac{m}{2}$ und $\frac{p}{a} = n'$, also $a = \frac{p}{n'} = \frac{m}{2n'}$ annehmen. Die gegebene Gleichung gehört also einer Ellipse an, deren Parameter $2p = m$ und deren große Axe $2a = \frac{m}{n'}$ ist.

3) Ist endlich n positiv, so geht die gegebene Gleichung

$$y^2 = mx + nx^2$$

in die Scheitelgleichung der Hyperbel (§. 131)

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}$$

über, wenn wir $2p = m$ und $\frac{p}{a} = n$, also $a = \frac{m}{2n}$ annehmen. — Nach §. 129 ist bei der Hyperbel $p = \frac{b^2}{a}$, woraus sich $n = \frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2} = \operatorname{tang} \omega^2$ und folglich $\operatorname{tang} \omega = \pm \sqrt{n}$ ergibt. Der Coefficient n liefert uns also unmittelbar den Winkel ω, welchen die Asymptoten mit der Hauptaxe der Hyperbel bilden.

II) Bei der Erörterung des zweiten Hauptfalles, daß $m = 0$ ist, also die Gleichung $y^2 = nx^2$ gegeben ist, haben wir abermals drei Fälle zu unterscheiden. Wenn

1) n positiv ist, so liefert uns die vorstehende Gleichung die beiden Auflösungen $y = + x\sqrt{n}$ und $y = - x\sqrt{n}$; es umfaßt dieselbe also zwei durch den Anfangspunkt gehende gerade Linien, welche mit der Abscissenaxe an beiden Seiten gleiche Winkel bilden, von denen der eine $+ \sqrt{n}$, der andere $- \sqrt{n}$ zur trigonometrischen Tangente hat. Die im vorher behandelten Falle erörterte Hyperbel ist folglich durch die Annahme $m = 0$ in die ihr zugehörigen Asymptoten übergegangen.

2) Wenn $n = 0$ ist, so erhalten wir die Gleichung

$$y^2 = 0, \text{ also auch } y = 0,$$

welche einer geraden Linie, nämlich der Abscissenaxe angehört.

3) Sollte endlich n negativ $= - n'$ sein, so würde der Gleichung

$$y^2 = - n'x^2$$

nur durch die Annahme $x = 0 = y$ genügt werden können. Es entspricht also dieser Gleichung ein einziger Punkt, der Anfangspunkt der Coordinaten.

Die Gleichung

$$y^2 = mx + nx^2$$

umfaßt also zunächst die drei Kegelschnitte Parabel, Ellipse, Hyperbel; sie kann ferner zwei geraden Linien, einer geraden Linie und auch nur einem einzigen Punkte zukommen; (sie umfaßt hiernach, wie wir im folgenden Abschnitte zeigen werden, alle möglichen Fälle, welche überhaupt beim Durchschneiden einer Kegelfläche mit einer Ebene vorkommen können).

Da die Gleichung der Parabel und die Scheitelgleichungen der Ellipse und Hyperbel für schiefwinklige Coordinaten (§. 55, 93 und §. 132) ganz dieselbe Form, wie für rechtwinklige Coordinaten haben, so bleiben die Behauptungen des §. 138 auch dann noch richtig, wenn x und y nicht rechtwinklige, sondern schiefwinklige Coordinaten bezeichnen, mit der einzigen Ausnahme, daß, wenn die Gleichung

$$y^2 = mx + nx^2$$

zwei gerade Linien oder eine Hyperbel repräsentirt, bei schiefwinkligen Axen $\sqrt{n}$ nicht der trigonometrischen Tangente des Winkels gleich ist, welchen jene Linien oder die Asymptoten der Hyperbel mit der Abscissenaxe bilden.

§. 139. Lehrsatz.

Die Gleichung vom zweiten Grade

$$1)\quad Ay^2 + Bx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

in welcher das Glied mit dem Factor xy fehlt, gehört

1) einer Ellipse an, wenn die Coefficienten A und B entweder beide positiv oder beide negativ sind,

2) einer Hyperbel, wenn einer der beiden Coefficienten A und B positiv, der andere negativ ist,

3) einer Parabel, wenn einer derselben gleich Null ist.

Bew. Es seien zuerst A und B beide von Null verschieden, und es werde überdies A als positiv angenommen, was unbeschadet der Allgemeinheit der Betrachtung geschehen kann, da man im entgegengesetzten Fall nur nöthig hätte, sämmtliche Vorzeichen in der gegebenen Gleichung umzukehren. — Dies vorausgesetzt möge die obige Gleichung zunächst folgendermaßen umgestaltet werden

$$A\left(y^2 + \frac{D}{A}y\right) + B\left(x^2 + \frac{E}{B}x\right) + F = 0.$$

Addirt man dann, um die eingeschlossenen unvollständigen Quadrate zu ergänzen, beiderseits:

$$A \cdot \frac{D^2}{4A^2} + B \cdot \frac{E^2}{4B} = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B},$$

so erhält man

$$A\left(y^2 + \frac{D}{A}y + \frac{D^2}{4A^2}\right) + B\left(x^2 + \frac{E}{B}x + \frac{E^2}{4B^2}\right) = + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B} - F$$

oder

$$2)\quad A\left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 + B\left(x + \frac{E}{2B}\right)^2 = G,$$

wo man, um abzukürzen,

$$3)\quad \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B} - F = G$$

gesetzt hat. — Ist nun erstens B — so wie auch A — positiv, so läßt sich leicht die Gleichung (2) auf die folgende Form zurückführen

$$a^2(y - \beta)^2 + b^2(x - \alpha)^2 = a^2b^2,$$

welche nach §. 94 einer Ellipse angehört, deren Axen 2a und 2b sind und mit den Coordinatenaxen parallel laufen, und deren Mittelpunkt die Coordinaten α und β hat. Dividirt man nämlich in der ersteren Gleichung beiderseits mit G, in der andern mit a^2b^2, so verwandeln sich dieselben in

$$\frac{A}{G}\left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 + \frac{B}{G}\left(x + \frac{E}{2B}\right)^2 = 1$$

und

$$\frac{1}{b^2}(y - \beta)^2 + \frac{1}{a^2}(x - \alpha)^2 = 1,$$

und diese beiden Gleichungen werden identisch, wenn man setzt

$$\frac{1}{b^2} = \frac{A}{G} \quad \text{und} \quad \frac{1}{a^2} = \frac{B}{G},$$

also $\quad 4)\ a^2 = \dfrac{G}{B}, \quad 5)\ b^2 = \dfrac{G}{A},$

ferner $\quad 6)\ \alpha = -\dfrac{E}{2B} \quad$ und $\quad 7)\ \beta = -\dfrac{D}{2A}.$

Sollte sich hieraus $a < b$ ergeben, so wird man $2b$ als erste und $2a$ als zweite Axe annehmen oder in der gegebenen Gleichung x und y mit einander vertauschen.

Ist zweitens B negativ $= - B'$, so erhält die Gleichung (2) folgende Form:

$$A\left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 - B'\left(x - \frac{E}{2B'}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4B} - F,$$

oder wenn man

$$\frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4B'} - F = - G'$$

setzt:

$$8)\quad A\left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 - B'\left(x - \frac{E}{2B'}\right)^2 = - G'.$$

Stellt man diese Gleichung mit der Gleichung der Hyperbel (§. 133)

$$a^2 (y - \beta)^2 - b^2 (x - \alpha)^2 = - a^2 b^2$$

zusammen, so findet man, so wie oben bei der Ellipse,

$$9)\quad a^2 = \frac{G'}{B'}, \qquad 10)\quad b^2 = \frac{G'}{A},$$

$$11)\quad \alpha = + \frac{E}{2B'}, \qquad 12)\quad \beta = - \frac{D}{2A}.$$

Sollte G' negativ, d. h.

$$\frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4B'} - F$$

positiv sein, so würden die Gleichungen (9) und (10) imaginäre Werthe für a und b liefern; nichts destoweniger gehört die Gleichung (8) ebenfalls einer Hyperbel an, deren erste Axe aber mit der Ordinatenaxe zusammenfällt, wie man sich sehr bald überzeugt, wenn man in der Gleichung (8) x mit y vertauscht und die Vorzeichen sämmtlicher Glieder der Gleichung umkehrt.

Wenn drittens $B = 0$, also die Gleichung

$$13)\quad Ay^2 + Dy + Ex + F = 0$$

gegeben sein sollte, so wird man derselben zunächst die folgende Form ertheilen können:

$$y^2 + \frac{D}{A} y = - \frac{Ex}{A} - \frac{F}{A}$$

und dann weiter, indem man die linke Seite zu einem vollständigen Quadrate ergänzt,

$$y^2 + \frac{D}{A} y + \frac{D^2}{4A^2} = - \frac{E}{A} x - \frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2}$$

oder

$$14)\quad \left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 = - \frac{E}{A}\left(x + \frac{F}{E} - \frac{D^2}{4AE}\right).$$

Diese Gleichung verwandelt sich in die Gleichung der Parabel (§. 52)

$$(y - \beta)^2 = 2p (x - \alpha),$$

wo α und β die Coordinaten des Scheitels, $2p$ den Parameter bezeichnet und die Axe der Parabel als der positiven Schenkel der Abscissenaxe angenommen ist, — wenn man setzt

$$15)\quad 2p = - \frac{E}{A}, \qquad 16)\quad \beta = - \frac{D}{2A} \quad \text{und} \quad 17)\quad \alpha = \frac{D^2}{4AE} - \frac{F}{E}.$$

Sollte $-E$ negativ sein, so würde auch $2p$ in der Gleichung (15) negativ werden, d. h. es fiele dann die Axe der Parabel mit dem negativen Schenkel der Abscissenaxe zusammen (§. 46, a.). Will man dieses vermeiden, so braucht man nur die Abscissen nach der entgegengesetzten Seite hin positiv zu nehmen und x mit $-x$ zu vertauschen.

Wenn in der Gleichung (1) $A = 0$, aber B von Null verschieden ist, so wird ganz die eben angestellte Betrachtung gelten, wenn man vorher x mit y vertauscht.

Der Fall endlich, daß A und B beide $= 0$ sein sollten, kann als nicht hierher gehörig übergangen werden, indem dann die gegebene Gleichung (1) nur vom ersten Grade sein würde und von den Linien der ersten Ordnung, d. h. von der geraden Linie bereits im zweiten Abschnitt vollständig gehandelt worden ist.

Die vorhergehenden allgemeinen Behauptungen mögen folgende Beispiele veranschaulichen:

$$1)\quad y : x = x : f - y.$$

Wenn wir diese Gleichung ordnen, so erhalten wir

$$y^2 - fy + x^2 = 0.$$

Da in dieser Gleichung die Coefficienten von y^2 und x^2 beide $= 1$ sind, so gehört dieselbe einem Kreise an. Um den Radius und die Coordinaten des Mittelpunkts zu finden, ergänzen wir die beiden ersten Glieder zu einem vollständigen Quadrate, indem wir beiderseits $\frac{1}{4}f^2$ addiren; dann erhalten wir

$$(y - \tfrac{1}{2}f)^2 + x^2 = \tfrac{1}{4}f^2.$$

Wenn wir nun diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung des Kreises

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2$$

zusammenstellen, so ergibt sich

$$\alpha = 0, \quad \beta = \tfrac{1}{2}f = AC \text{ (Fig. 54) und } r = \tfrac{1}{2}f = AC.$$

Es gehört also die Gleichung (1) einem Kreise an, welcher mit dem Radius $\frac{1}{2}f$ beschrieben die Abscissenaxe AX im Anfangspunkte A an der Seite der positiven Ordinaten berührt,

$$2)\quad y^2 = 4g(x + y).$$

Wenn wir ordnen, so erhalten wir

$$y^2 - 4gy = 4gx.$$

Da diese Gleichung kein x^2 enthält, so muß dieselbe einer Parabel angehören. Ergänzen wir die linke Seite zu einem vollständigen Quadrate, indem wir beiderseits $4g^2$ addiren, so erhalten wir die folgende Gleichung

$$(y - 2g)^2 = 4g(x + g),$$

welche in die allgemeine Gleichung der Parabel

$$(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha)$$

übergeht, wenn wir $\alpha = -g = -AB$ (Fig. 55),

$$\beta = 2g = AF = BC$$

und $2p = 4g = 4AB = 4CF$

annehmen. Da hiernach $CF = \frac{1}{2}p$ ist, so ist F der Brennpunkt. Die gesuchte Parabel hat also ihren Brennpunkt im positiven Schenkel der Ordinatenaxe und durchschneidet beide Coordinatenaxen im Anfangspunkte.

$$3)\quad 4y^2 + 3x^2 - 2fx = f^2.$$

Da die Coefficienten der beiden ersten Glieder einerlei Vorzeichen haben, so gehört die Gleichung einer Ellipse an, zu deren näherer Kenntniß folgende Rechnung führt:

$$4y^2 + 3(x^2 - \tfrac{2}{3}fx) = f^2$$
$$4y^2 + 3(x - \tfrac{1}{3}f)^2 = \tfrac{4}{3}f^2.$$

Stellen wir diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung der Ellipse

$$a^2(y - \beta)^2 + b^2(x - \alpha)^2 = a^2b^2$$

zusammen, so ergibt sich

$$\alpha = \tfrac{1}{3}f^2 = AC \text{ (Fig. 56) und } \beta = 0,$$
$$a^2 = \tfrac{4}{9}f^2, \text{ also } a = \tfrac{2}{3}f = CB = CD,$$
$$b^2 = \tfrac{1}{3}f^2 = \tfrac{3}{9}f^2, \text{ also } b = \tfrac{1}{3}f\sqrt{3},$$
$$c^2 = a^2 - b^2 = \tfrac{1}{9}f^2, \text{ also } c = \tfrac{1}{3}f = CA,$$

d. h. der Anfangspunkt der Coordinaten ist zugleich der Brennpunkt der gesuchten Ellipse. Will man noch die kleine Axe derselben in der Zeichnung darstellen, so braucht man nur aus A mit BC einen Kreis zu beschreiben, welcher ein in C auf BD errichtetes Loth in E und G durchschneidet. Dann ist EG = 2b.

$$4) \quad y^2 - 3x^2 + 6fx = 0.$$

Die Gleichung gehört einer Hyperbel an, da die beiden quadratischen Glieder entgegengesetzte Zeichen haben. Wird dieselbe eben so wie die frühere behandelt, so ergibt sich

$$y^2 - 3(x - f)^2 = -3f^2.$$

Vergleichen wir hiermit die allgemeine Gleichung der Hyperbel

$$a^2(y - \beta)^2 - b^2(x - \alpha)^2 = -a^2b^2,$$

so finden wir weiter

$$\alpha = f = AC \text{ (Fig. 57) und } \beta = 0,$$
$$a^2 = f^2, \text{ also } a = f = AC = CB,$$
$$b^2 = 3f^2, \text{ also } b = f\sqrt{3}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 = 4f^2, \text{ also } c = 2f = CF = CF'.$$

Da sich $\alpha = a$ ergeben hat, so berührt folglich derjenige Zweig der Hyperbel, welcher sich nach der Seite der negativen x hin öffnet, die Ordinatenaxe im Anfangspunkte. Wenn man ferner mit CF aus C einen Kreis beschreibt, welcher ein in B auf AB errichtetes Loth in D und E schneidet, so sind CD und CE die Asymptoten der darzustellenden Hyperbel. Da nun CB = f und CF = 2f, also CF in B halbirt ist, so ist auch DF = CD = CF, folglich W. DCB = 60^0, also der Asymptotenwinkel DCE = 120^0.

$$5) \quad 4y^2 + 9x^2 - 4dy - 6dx = -d^2.$$

Aus dieser Gleichung, welche offenbar einer Ellipse angehört, erhält man nach dem schon mehrmals angewendeten Verfahren

$$\begin{array}{r} 4(y^2 - dy) + 9(x^2 - \tfrac{2}{3}dx) = -d^2 \\ + 4 \cdot \tfrac{1}{4}d^2 + 9 \cdot \tfrac{1}{9}d^2 = 2d^2 \\ \hline 4(y - \tfrac{1}{2}d)^2 + 9(x - \tfrac{1}{3}d)^2 = d^2. \end{array}$$

Stellt man hiermit die allgemeine Gleichung der Ellipse

$$a^2(y - \beta)^2 + b^2(x - \alpha)^2 = a^2b^2$$

zusammen, so ergibt sich

$$\alpha = \tfrac{1}{3}d = AB \text{ (Fig. 58)}, \beta = \tfrac{1}{2}d = BC;$$
$$a^2 = \tfrac{1}{9}d^2, \quad \text{also} \quad a = \tfrac{1}{3}d = AB = CD;$$
$$b^2 = \tfrac{1}{4}d^2, \quad \text{also} \quad b = \tfrac{1}{2}d = BC.$$

Die durch die obige Gleichung repräsentirte Ellipse berührt folglich die positiven Schenkel der beiden Coordinatenaxen.

Da sich aus den vorstehenden Gleichungen $a = \frac{1}{3}d$ und $b = \frac{1}{2}d$, also $a < b$ ergeben hat, so wird man unter 2a = DG die kleine und unter 2b = DE die große Axe zu verstehen haben. Wollte man indeß diese Abweichung von der bisher angewandten Bezeichnungsweise vermeiden, so brauchte man nur in der gegebenen Gleichung vor aller Umformung x und y mit einander zu vertauschen.

§. 140. Zusatz.

Im vorherg. §. hat man gefunden, daß die Gleichung

$$1)\quad Ay^2 + Bx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

in welcher, wie man oben gesehen hat, A als von Null verschieden und positiv — unbeschadet der Allgemeinheit — angenommen werden kann, niemals einer anderen krummen Linie, als einem Kegelschnitte angehört, indem sich dieselbe umformen läßt, wenn erstens B positiv ist, in:

$$\mathfrak{A})\quad A\left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 + B\left(x + \frac{E}{2B}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B} - F = G,$$

zweitens wenn B negativ = — B' ist, in:

$$\mathfrak{B})\quad A\left(y + \frac{D}{2A}\right) - B'\left(x - \frac{E}{2B'}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4B} - F = -G',$$

und drittens wenn B = 0 ist, in:

$$\mathfrak{C})\quad \left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}\left(x + \frac{F}{E} - \frac{D^2}{4AE}\right),$$

von welchen Formen die erste im allgemeinen einer Ellipse, die andere einer Hyperbel und die letzte einer Parabel zukommt. Es können aber auch Fälle eintreten, in welchen jene Gleichungen überhaupt keiner krummen Linie angehören. Diese Ausnahmefälle sind folgende:

1) für die Gleichung ($\mathfrak{A}$), wenn die rechte Seite G = 0 oder negativ wird. Ist zunächst G = 0, so verschwinden auch die zugehörigen Werthe von a und b, und es gibt dann nur noch einen einzigen Punkt, dessen Coordinaten

$$x = -\frac{E}{2B} \quad \text{und} \quad y = -\frac{D}{2A}$$

der Gleichung ($\mathfrak{A}$) Genüge leisten. Denn da das Quadrat einer negativen Zahl eben so wohl, als das Quadrat einer positiven Zahl einer positiven Zahl gleich ist, so kann die linke Seite derselben, da A und B als von Null verschieden angenommen sind, nur dann verschwinden, wenn zugleich

$$y + \frac{D}{2A} = 0 \quad \text{und} \quad x + \frac{E}{2B} = 0$$

wird. — Ist ferner G negativ, so werden a und b imaginär, und es kann dann aus den eben angeführten Gründen gar keinen Punkt geben, dessen Coordinaten der Gleichung ($\mathfrak{A}$) Genüge leisteten. — Wenn dagegen G positiv ist, so gehört jene Gleichung jedenfalls einer Ellipse an.

2) für die Gleichung ($\mathfrak{B}$), wenn G' = 0 wird. — Im vorhergeh. §. hat man bereits gesehen, daß G' eben so wohl positiv, als negativ sein kann, indem das einemal die erste Axe der Curve mit der Abscissenaxe, das anderemal mit der Ordinatenaxe zusammenfällt. Wenn aber G' = 0 ist, so verschwinden a und b und die Gleichung ($\mathfrak{B}$) verwandelt sich in

$$A\left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 = B'\left(x - \frac{2B'}{E}\right)^2,$$

also

$$y + \frac{D}{2A} = \pm\sqrt{\left(\frac{B'}{A}\right)} \cdot \left(x - \frac{2B}{E}\right).$$

Diese Gleichung — oder besser — diese beiden in eine Formel zusammen=

gefaßten Gleichungen gehören zweien geraden Linien an, welche von der Abscissenaxe an entgegengesetzten Seiten um gleiche Winkel abweichen*).

3) für die Gleichung (C), wenn $E = 0$ ist. Diese Gleichung ist aus (1) durch die Annahme $B = 0$ hervorgegangen; nimmt man überdies auch noch $E = 0$ an, so verwandelt sich die Gleichung (1) in die folgende:

$$\text{D)}\quad Ay^2 + Dy + F = 0,$$

welche gar kein x enthält. Löst man dieselbe nach y auf, so ergibt sich

$$y = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4AF}}{2A}$$

Diese Gleichung oder vielmehr diese beiden Gleichungen gehören, wenn $D^2 > 4AF$ ist, zweien geraden Linien an, welche mit der Abscissenaxe parallel laufen. Ist $D^2 = 4AF$, so verschwindet der Wurzelausdruck und die beiden geraden Linien fallen in eine zusammen. Ist endlich $D^2 < 4AF$, so wird der Wurzelausdruck imaginär, und es gibt dann gar keinen Punkt, welcher für die Gleichung (D) paßte.

*§. 141. Zusatz.

Die Behauptungen der beiden vorhergehenden §§. bleiben auch dann noch richtig, wenn x und y schiefwinklige Coordinaten bezeichnen.

Beweis. Denn die Gleichung (1) in §. 139 läßt sich allemal auf eine der drei Formen (A), (B), (C) bringen, und diese Gleichungen müssen auch, wenn die Coordinatenaxen sich schiefwinklig schneiden, ebenfalls im allgemeinen einer Ellipse, einer Hyperbel oder einer Parabel angehören, indem die Gleichungen dieser drei Curven, wenn man sie auf conjugirte Durchmesser bezieht, vermöge §. 55, 89 und 126 ganz dieselbe Form erhalten, als wenn sie auf ihre Axen bezogen werden, wobei natürlich eben solche Ausnahmsfälle eintreten können, wie die im vorherg. §. betrachteten.

*§. 142. Lehrsatz.

Die allgemeine Gleichung vom zweiten Grade

$$1)\quad Ay^2 + Bx^2 + Cxy + Dy + Ex + F = 0,$$

in welcher x nur y eben sowohl schiefwinklige, als rechtwinklige Coordinaten bezeichnen können, gehört im allgemeinen

1) einer Ellipse an, wenn $4AB - C^2 > 0$ ist;
2) einer Hyperbel, wenn $4AB - C^2 < 0$ ist;
3) einer Parabel, wenn $4AB - C^2 = 0$ ist.

Beweis. Man hat im vorherg. §. gesehn, daß die geordnete Gleichung vom zweiten Grade zwischen parallelen Coordinaten, in welcher das Product dieser Coordinaten fehlt, im allgemeinen einem Kegelschnitte angehört, von welchem zwei conjugirte Durchmesser den Coordinatenaxen parallel laufen. Wenn daher die obige Gleichung wirklich einem Kegelschnitte angehören soll, so muß es möglich sein, den Coordinatenaxen eine solche Richtung zu ertheilen, daß der Coefficient des Products beider Coordinaten verschwindet.

*) Diese beiden geraden Linien sind offenbar die Asymptoten der durch die allgemeine Gleichung (B) repräsentirten Hyperbel, in welche dieselbe übergeht, wenn man die beiden Axen bei ungeändertem Verhältnisse (a : b) bis zum Verschwinden abnehmen läßt. Vergl. auch oben die Anm. zu §. 114.

Da wir nun füglich den einen der beiden conjugirten Durchmesser*) als der ursprünglich gegebenen Abscissenaxe parallel annehmen können, so werden wir, um den angegebenen Zweck zu erreichen, nur nöthig haben, die Richtung der Ordinatenaxe auf angemessene Weise abzuändern. Sind nun u und v die neuen Coordinaten eines Punktes, dessen ursprüngliche Coordinaten mit x und y bezeichnet sind, ist ferner γ der Winkel, unter welchem sich die ursprünglichen Coordinatenaxen schneiden, und β der Winkel, welchen die neue Ordinatenaxe mit der nicht geänderten Abscissenaxe bildet, so folgt aus den Gleichungen des §. 17, wenn wir $\alpha = 0$ setzen, da die Abscissenaxe ihre Richtung beibehalten hat,

$$x = \frac{u \sin \gamma + v \sin (\gamma - \beta)}{\sin \gamma} \text{ und } y = \frac{v \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Setzen wir diese Werthe in die obige Gleichung (1), indem wir zugleich alle Glieder mit $\sin \gamma^2$ multipliciren, so erhalten wir

$$(2) \left\{\begin{array}{l} (A \sin \beta^2 + B \sin (\gamma - \beta)^2 + C \sin \beta \sin (\gamma - \beta)\, v^2 \\ + B \sin \gamma^2 . u^2 + (2B \sin (\gamma - \beta) \sin \gamma + C \sin \beta \sin \gamma)\, uv \\ + (D \sin \beta \sin \gamma + E \sin (\gamma - \beta) \sin \gamma)\, v + E \sin \gamma^2 .\, u \end{array}\right\} + F \sin \gamma^2 = 0$$

Damit in dieser Gleichung der Coefficient des dritten Gliedes verschwinde, werden wir den Winkel β so annehmen müssen, daß

$$3)\quad 2B \sin (\gamma - \beta) + C \sin \beta = 0$$

oder $2B \sin \gamma \cos \beta - 2B \cos \gamma \sin \beta + C \sin \beta = 0$,

also
$$\tang \beta = \frac{2B \sin \gamma}{2B \cos \gamma - C}$$

wird, was allemal möglich ist, da die Tangente eben sowohl positiv, als negativ, ein ächter, als ein unächter Bruch sein kann; ja selbst wenn $2B \cos \gamma - C = 0$ sein sollte, werden wir der Gleichung (3) Genüge leisten können, wenn wir $\beta = 90^0$ annehmen. Wenn wir hiernach auch im Stande sind, β allemal so zu wählen, daß der Gleichung (3) genügt wird, so befindet sich doch unter den verschiedenen Werthen von β einer, welchen wir nicht als den Bedingungen der Aufgabe selbst angemessen ansehn können; wenn nämlich $B = 0$ sein sollte, würde sich aus der Gleichung (3) im allgemeinen auch $\beta = 0$ ergeben, d. h. die neue Ordinatenaxe würde mit der Abscissenaxe zusammenfallen, was offenbar ganz unzulässig ist. Sehen wir nun fürs erste von diesem besondern Falle, auf welchen wir später zurückkommen wollen, ganz ab, und nehmen wir also B als von Null verschieden an, so erhalten wir, wenn wir uns β als der Gleichung (3) gemäß bestimmt denken und daher in den Coefficienten der Gleichung (2) durchgehends

$$\sin (\gamma - \beta) = \frac{-C \sin \beta}{2B}$$

setzen:

---

*) Bei der Parabel kann allerdings nur von einem Durchmesser die Rede sein, der überdies keine willkührliche, sondern eine ganz bestimmte Richtung hat. Man kann sich indeß bei den obigen Betrachtungen, welche nur den Zweck haben, in das Folgende einzuleiten, füglich auf die Ellipse und Hyperbel beschränken und dann zusehn, ob die gewonnenen Ergebnisse auch für die Parabel passen, was mit Grund zu vermuthen steht, da sich die Parabel als ein besondrer Fall der Ellipse oder Hyperbel ansehn läßt.

$$A \sin \beta^2 + B \sin (\gamma - \beta)^2 + C \sin \beta \sin (\gamma - \beta) =$$

$$A \sin \beta^2 + \frac{C^2 \sin \beta^2}{4B} - \frac{C^2 \sin \beta^2}{2B^2} = \frac{4AB - C^2}{4B} \sin \beta^2$$

und $D \sin \beta \sin \gamma + E \sin (\gamma - \beta) \sin \gamma = \dfrac{(2BD - CE) \sin \beta \sin \gamma}{2B}$,

wodurch die Gleichung (2) selbst, wenn wir noch überdies alle Glieder mit 4B multipliciren, übergeht in

$$4) \left\{ \begin{array}{l} (4AB - C^2) \sin \beta^2 v^2 + 4B^2 \sin \gamma^2 u^2 + \\ (4BD - 2CE) \sin \beta \sin \gamma^2 v + 4BE \sin \gamma^2 u + 4BF \sin \gamma^2 \end{array} \right\} = 0.$$

Diese Gleichung nun, in welcher das Product u . v fehlt, gehört nach §. 139 im allgemeinen einer Ellipse an, wenn die Coefficienten der beiden quadratischen Glieder

$$(4AB - C^2) \sin \beta^2 \text{ und } 4B^2 \sin \gamma^2$$

einerlei Vorzeichen haben, also im vorliegenden Falle, da der zweite derselben offenbar eine positive Zahl ist, wenn

$$4AB - C^2 > 0$$

ist; sie gehört einer Hyperbel an, wenn der eine jener beiden Coefficienten positiv, der andere negativ ist, also wenn

$$4AB - C^2 < 0$$

ist; sie gehört endlich einer Parabel an, wenn einer der beiden Coefficienten verschwindet, d. h. da B und γ, also auch $4B^2 \sin \gamma^2$, so wie auch β und $\sin \beta$ als von Null verschieden angenommen sind, wenn

$$4AB - C^2 = 0$$

ist. Demnach gilt der obige Lehrsatz zunächst so lange, als B von Null verschieden ist, wobei es sich indeß von selbst versteht, daß hier eben solche Ausnahmsfälle, wie bei der Gleichung (1) in §. 139 eintreten können, daß nämlich durch die Gleichung überhaupt keine krumme Linie gegeben ist.

Soll aber der Lehrsatz auch dann noch richtig sein, wenn $B = 0$ ist, so wird zunächst, wenn C nicht Null, also

$$4AB - C^2 < 0$$

ist, die Gleichung einer Hyperbel, und wenn $C = 0$, also

$$4AB - C^2 = 0$$

ist, einer Parabel angehören müssen; und dies ist in der That der Fall, wie sich leicht zeigen läßt. Denn ist zunächst C von Null verschieden, so hat man nur nöthig, um sich von der Richtigkeit der erstern Behauptung zu überzeugen, in der Gleichung (1) x mit y zu vertauschen und dann das vorher für den Fall Erwiesene, daß der Coefficient von x^2 (vorher B, jetzt A) von Null verschieden ist, in Anwendung zu bringen.

Es ist aber in diesem Falle die Abscissenaxe einer Asymptote der Hyperbel parallel*); denn die Gleichung (1) liefert, wenn $B = 0$ ist und der Ordinate y irgend ein beliebiger Werth beigelegt wird, für die Abscisse x nur einen Werth; eine zur Abscissenaxe parallele Linie schneidet also die Hyperbel nur in einem Punkte, was zufolge §. 127, Anm. nur dann eintreten kann, wenn

*) woraus sich sehr einfach erklärt, daß dann die Gleichung (3) für β einen unbrauchbaren Werth liefert, da zu der Richtung der Asymptote kein conjugirter Durchmesser existirt.

diese Linie und folglich auch die Abscissenaxe selbst einer Asymptote parallel ist. Aus gleichen Gründen muß die Ordinatenaxe, wenn in der Gleichung (1) der Coefficient des ersten Gliedes $A = 0$ ist, einer Asymptote parallel sein.

Wenn A und B beide $= 0$ sind, so sind auch beide Coordinatenaxen den Asymptoten parallel. Denn die Gleichung (1) vereinfacht sich dann in

$$Cxy + Dy + Ex + F = 0,$$

wofür wir auch, da C von Null verschieden sein soll,

$$xy + \frac{Dy}{C} + \frac{Ex}{C} + \frac{F}{C} = 0$$

oder auch
$$\left(x + \frac{D}{C}\right) . \left(y + \frac{E}{C}\right) = \frac{DE}{C^2} - \frac{F}{C}$$

setzen können. Diese Gleichung aber gehört, wie man leicht aus §. 114 erkennt, einer Hyperbel an, deren Asymptoten den Coordinatenaxen parallel laufen.

Endlich stimmt auch der andere Fall, wenn B und C beide $= 0$ sind, mit dem Ausspruche des Lehrsatzes überein; denn es geht dann die Gleichung (1) in die folgende

$$Ay^2 + Dy + Ex + F = 0$$

über, von welcher wir schon in §. 139 gesehn haben, daß sie einer Parabel zukommt.

Demnach kann die allgemeine Gleichung vom zweiten Grade

$$Ay^2 + Bx^2 + Cxy + Dy + Ex + F = 0,$$

welches auch immer die Werthe der Coefficienten A, B, C, D, E, F sein mögen, niemals einer anderen krummen Linie, als einem Kegelschnitte angehören; und wenn dies wirklich der Fall ist, so ist der zugehörige Kegelschnitt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem 4AB größer oder kleiner oder eben so groß, als C^2 ist.

1. Sind x und y in der Gleichung (1) rechtwinklige Coordinaten, also $\gamma = 90^0$, so verwandeln sich die Gleichungen (3) und (4) in

$$\operatorname{tang} \beta = -\frac{2B}{C}$$

und

$$(4AB - C^2) \sin \beta^2 . v^2 + 4B^2u^2 + (4BD - 2CE) \sin \beta . v + 4BEu + 4BF = 0.$$

2. Zur Erläuterung der vorhergehenden allgemeinen Entwicklungen mögen folgende zwei Beispiele dienen:

$$1)\quad 7x^2 + 7y^2 + 2xy - 6y - 42x - 15 = 0,$$

wo x und y schiefwinklige Coordinaten bezeichnen sollen, die einen Winkel von 60^0 einschließen, so daß also

$$\sin \gamma = \sin 60^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \text{ und } \cos \gamma = \cos 60^0 = \tfrac{1}{2}$$

ist. Da in der gegebenen Gleichung

$$A = 7,\ B = 7,\ C = 2,\ D = -6,\ E = -42,\ F = -15,$$

also
$$4AB - C^2 = +192$$

ist, so gehört dieselbe einer Ellipse an, zu deren näheren Kenntniß folgende Rechnung führt:

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{2B \sin \gamma}{2B \cos \gamma - C} = \frac{7\sqrt{3}}{5}, \text{ folglich } \sin \beta^2 = \frac{147}{172},$$

$$(4AB - C^2) \sin \beta^2 = \frac{192 . 147}{172} = \frac{48 . 147}{43},\ 4B^2 \sin \gamma^2 = 147,$$

$$(4BD - 2CE) \sin \beta \sin \gamma = 0,\ 4BE \sin \gamma^2 = -882,\ 4BF \sin \gamma^2 = -315.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (4) des vorherg. §., so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{48 \,.\, 147}{43} v^2 + 147u^2 - 882u = -315,$$

oder wenn wir beiderseits mit 147 dividiren und mit 43 multipliciren,

$$48v^2 + 43u^2 - 6 \,.\, 43u = -\frac{15 \,.\, 43}{7},$$

und wenn wir das unvollständige Quadrat ergänzen, indem wir beiderseits 9 . 43 addiren,

$$48v^2 + 43(u - 3)^2 = \frac{48 \,.\, 43}{7}.$$

Zufolge §. 89 gehört diese Gleichung eine Ellipse an, bei welcher zwei conjugirte Durchmesser

$$2A = 2\sqrt{\frac{48}{7}} \text{ und } 2B = 2\sqrt{\frac{43}{7}}$$

den Coordinatenaxen parallel laufen, der Mittelpunkt in der Abscissenaxe liegt und um die Abscisse + 3 vom Anfangspunkte entfernt ist, und in welcher nach dem Obigen die trigonometrische Tangente des Conjugationswinkels $\beta = \frac{7\sqrt{3}}{5}$ ist, also dieser Winkel ohngefähr $67^0\, 35'$ beträgt. Bezeichnen wir mit 2a und 2b die Axen dieser Ellipse, so haben wir zur Bestimmung derselben nach §. 83 die Gleichungen

$$a^2 + b^2 = A^2 + B^2 = 13$$

und $$a^2b^2 = A^2B^2 \sin\beta^2 = 36 \text{*)},$$

aus denen sich leicht $$a = 3 \text{ und } b = 2$$

ergibt. — Ist nun α der Winkel, welchen die große Axe der Ellipse 2a mit der Abscissenaxe, also auch mit dem Durchmesser 2A bildet, so ist nach §. 81

$$A^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2}$$

also $$\sin\alpha^2 = \frac{b^2(a^2 - A^2)}{A^2(a^2 - b^2)},$$

d. h. im vorliegenden Falle

$$\sin\alpha^2 = \tfrac{1}{4} \text{ und folglich } \sin\alpha = \pm\, \tfrac{1}{2}.$$

Da die Gleichung der Ellipse, wenn man die Axen derselben als Coordinatenaxen annimmt, nämlich $$a^2y^2 + by^2 = a^2b^2$$

ganz dieselbe bleibt, nach welcher Seite hin man auch die x und y positiv oder negativ annehmen mag, so können wir in der zuletzt gefundenen Gleichung uns auf das positive Vorzeichen beschränken; allein auch so liefert die Gleichung noch zwei Werthe für α, nämlich einen spitzen Winkel von 30^0 und einen stumpfen Winkel von 150^0, von welchen indeß, da wir den Conjugationswinkel β oben als spitz festgestellt haben, nur der erstere gelten kann**).

Wollen wir nun nach diesem allen die durch die Gleichung (1) gegebene Ellipse oder doch wenigstens ihren Mittelpunkt und ihre Axen zeichnen, so werden wir zunächst zwei unter einem Winkel $\gamma = 60^0$ sich schneidende Coordinatenaxen AX und AY, Fig. 59, ziehen, dann auf der Abscissenaxe die Abscisse AC = + 3, wobei irgend eine

*) Der Conjugationswinkel, welcher in §. 83 mit γ bezeichnet ist, ist hier zufolge der vorstehenden Entwicklung $= \beta$ gesetzt worden.

**) Wenn wir in Fig. 38 OP als Abscissenaxe annehmen, mit welcher die große Axe der Ellipse den spitzen Winkel BCP bildet, dann ist der Conjugationswinkel MCP spitz, (MCO stumpf); umgekehrt muß offenbar auch der Winkel, welchen die große Axe AB mit dem positiven Schenkel der Abscissenaxe OP bildet, spitz sein, wenn W. MCP als spitz vorausgesetzt ist.

bestimmte Länge als Einheit angenommen wird, auftragen, wodurch der Mittelpunkt C gefunden ist. Durch diesen Punkt werden wir eine Linie, welche von der bisher angenommenen Abscissenaxe AX an der positiven Seite um einen Winkel von 30^0 abweicht, und senkrecht zu dieser durch den Mittelpunkt eine zweite Linie ziehen, ferner von der ersteren nach beiden Seiten hin vom Mittelpunkt aus $a = 3 = CD = CE$ und von der letztern eben so $b = 2 = CF = CG$ abschneiden, wodurch wir die Axen der Ellipse DE und FG sowohl ihrer Lage als Größe nach in der Zeichnung dargestellt haben.

$$2)\ y^2 + 4x^2 + 4xy - 3y - 2x - 48 = 0,$$

wo x und y rechtwinklige Coordinaten bezeichnen sollen. — Hier ist

$$A = 1,\ B = 4,\ C = 4,\ D = -3,\ E = -2,\ F = -48,$$

also

$$4AB - C^2 = 0;$$

die gegebene Gleichung gehört folglich einer Parabel an. Weiter ist

$$\text{tang}\,\beta = -\frac{2B}{C} = -2,\ \text{also}\ \sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Aus diesen Werthen erhalten wir zufolge der Anmerkung 1. zwischen den schiefwinkligen Coordinaten u und v, welche den Winkel β einschließen, die Gleichung:

$$16u^2 - \frac{64v}{\sqrt{5}} - 32u - 48 = 0$$

oder

$$u^2 - 2u = \frac{4v}{\sqrt{5}} + 3 = \frac{4v + 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}},$$

und wenn wir beiderseits 1 addiren

$$(u-1)^2 = \frac{4}{\sqrt{5}}(v+1).$$

Diese Gleichung gehört einer Parabel an, deren Durchmesser der Axe der v parallel ist und folglich von der Abscissenaxe um einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente $= -2$, also ohngefähr um einen Winkel von $116^0\,34'$ abweicht, während die diesem Durchmesser conjugirten Sehnen der Abscissenaxe parallel sind; der Scheitel dieses Durchmessers hat die Abscisse $+1$, die zur Axe der v parallele Ordinate -1 und den zugehörigen Parameter

$$2p' = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Ist 2p der Hauptparameter, so ist nach §. 55

$$2p = 2p' \sin\beta^2 = \frac{16}{5\sqrt{5}}.$$

Nimmt man den Hauptscheitel als Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten und die Axe der Parabel zur Abscissenaxe an, so ist nach demselben §., wenn s und t die Coordinaten des Scheitels des oben erwähnten Durchmessers bezeichnen,

$$t = p\,\text{cotg}\,\beta = -\frac{8}{5\sqrt{5}}$$

und

$$s = \frac{t^2}{2p} = \frac{4}{5\sqrt{5}}.$$

Will man hiernach die gesuchte Parabel zeichnen, so wird man zunächst zwei sich rechtwinklig schneidende Axen ziehen; durch einen Punkt, dessen Coordinaten $+1$ und -1 sind, wird man dann zwei neue rechtwinklige Axen so legen, daß die neue Abscissenaxe von der alten um einen Winkel, der $= \beta$ ist, abweicht. Der Hauptscheitel der Parabel hat in Beziehung auf diese beiden neuen Axen die Coordinaten $-s$ und $-t$ und die Axe der Parabel ist dem positiven Schenkel der Abscissenaxe parallel.

*§. 143. Zusatz.

Ueber die Gleichung

$$1)\ Ay^2 + Bx^2 + Cxy + Dy + Ex + F = 0$$

in §. 142 führen wir noch Folgendes an: Wie wir bereits dort gesehen haben, hängt die Art des durch diese Gleichung repräsentirten Kegelschnittes lediglich von den Coefficienten A, B und C der drei ersten Glieder ab. Weiter fügen wir hier in Betreff der Coefficienten D und E der beiden folgenden Glieder hinzu, daß, wenn $D = 0$ ist, die Abscissenaxe, und wenn $E = 0$ ist, die Ordinatenaxe durch den Mittelpunkt geht. Denn wenn wir zunächst $E = 0$ annehmen, so liefert die Gleichung (4) des §. 142, da in derselben das Glied mit u ausfällt, für die Abscisse u, welchen Werth wir auch immer der Ordinate v beilegen mögen, zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe, was offenbar voraussetzt, daß die Ordinatenaxe mit einem Durchmesser zusammenfällt, also durch den Mittelpunkt geht. Eben so ergibt sich, wenn wir uns die Abscisse mit der Ordinate, x mit y und u mit v, vertauscht denken, daß die Abscissenaxe durch den Mittelpunkt geht, wenn $D = 0$, wonach denn der Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt fallen muß, wenn die Coefficienten D und E beide gleich Null sind, ein Fall, welcher natürlich niemals bei der Parabel, sondern nur bei der Ellipse und Hyperbel vorkommen kann.

1. Die Gleichung (1) kann aber keiner Parabel angehören, wenn D und $E = 0$ sind. Denn die Gleichung (4) des §. 142 geht dann, weil bei der Parabel $4AB = C^2$ sein muß, über in

$$4B^2 \sin \gamma^2 u^2 + 4BF \sin \gamma^2 = 0, \text{ also } u = \pm\sqrt{-\frac{F}{B}}$$

eine Gleichung, welche, wenn $\frac{F}{B}$ negativ, also $-\frac{F}{B}$ positiv ist, zweien der Axe der v parallelen Linien angehört, und wenn $\frac{F}{B}$ positiv ist, für u einen imaginären Werth liefert.

2. An das Vorhergehende reihen wir auch noch die Aufgabe an, aus der Gleichung $1)\ Ay^2 + Bx^2 + Cxy + Dy + Ex + F = 0$ des §. 142 in dem Falle, daß dieselbe einer Hyperbel angehört, die Gleichungen der Asymptoten abzuleiten.

Ist zunächst der Coefficient $A = 0$, so haben wir bereits in §. 142 gesehen, daß die eine Asymptote der Ordinatenaxe parallel ist. Dividiren wir unter der angegebenen Voraussetzung, daß $A = 0$ ist, die Gleichung (1) durch y, so erhalten wir

$$\frac{Bx^2}{y} + Cx + D + \frac{Ex}{y} + \frac{F}{y} = 0.$$

Denken wir uns dann weiter auf dem Hyperbelaste, welcher sich an die der Ordinatenaxe parallele Asymptote anschließt, einen unendlich entfernten Punkt angenommen, so wird y unendlich groß, während x einen endlichen Werth erhält, nämlich der Abscisse des Punktes gleich wird, in welcher die der Ordinatenaxe parallele Asymptote die Abscissenaxe schneidet; es verschwinden daher in der zuletzt aufgeführten Gleichung sämmtliche Glieder, welche y zum Nenner haben, und wir erhalten für die der Ordinatenaxe parallele Asymptote die Gleichung

$$2)\ Cx + D = 0.$$

Die Gleichung aber, welche der anderen, keiner von beiden Axen parallelen Asymptote zukommt, werden wir weiter unten kennen lernen.

Ist ferner in der Gleichung (1) der Coefficient des zweiten Gliedes $B = 0$, so ist eine Asymptote der Abscissenaxe parallel und ihre Gleichung lautet

$$3)\quad Cy + E = 0.$$

Sind endlich die Coefficienten A und B beide gleich Null, so sind die Asymptoten den beiden Coordinatenaxen parallel und durch die Gleichungen (2) und (3) gegeben.

Setzen wir nun weiter voraus, daß der Coefficient A von Null verschieden und daß also keine Asymptote der Ordinatenaxe parallel ist, so werden wir für eine Asymptote die Gleichung

$$4)\quad y = mx + q$$

aufstellen können. — Wenn wir die Abscisse x unendlich groß annehmen, so geht die Ordinate der Hyperbel in die der Asymptote über, und wir werden daher, da unter der angegebenen Voraussetzung zwischen den Werthen von y in den Gleichungen (1) und (4) keine Verschiedenheit stattfindet, den Werth von y aus (1) in (4) einsetzen können, wodurch diese Gleichung nach einiger Umformung übergeht in

$$5)\quad (Am^2 + B + Cm)x^2 + (2Amq + Cq + Dm + E)x + Aq^2 + Dq + F = 0.$$

Vermöge Gleichung (4) ist

$$\frac{y}{x} = m + \frac{q}{x}.$$

Nehmen wir x unendlich groß an, so verschwindet das letzte Glied $\frac{q}{x}$; der Quotient $\frac{y}{x}$ aber erhält, obschon y selbst gleichzeitig mit x unendlich wird, einen endlichen Werth; derselbe wird nämlich $= m$. Wenn wir daher die Gleichung (5) durch x^2 dividiren, wodurch dieselbe übergeht in

$$6)\quad Am^2 + B + Cm + \frac{2Amq + Cq + Dm + E}{x} + \frac{Aq^2 + Dq + F}{x^2} = 0,$$

so verschwinden die beiden letzten Glieder, welche x im Nenner haben, wenn wir x unendlich groß annehmen, da ihre Zähler endliche Werthe repräsentiren. Die Gleichung (6) verwandelt sich dann in

$$6)\quad Am^2 + B + Cm = 0,$$

woraus sich

$$7)\quad m = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4AB}}{2A}$$

ergibt. Wir erhalten also, da zufolge §. 142 $C^2 > 4AB$ ist, für m zwei (reelle) Werthe, von denen der eine der einen, der andere der andern Asymptote entspricht. Wenn wir in der Gleichung (5) m einen dieser beiden Werthe beilegen, so verschwindet in derselben das erste Glied und sie verwandelt sich in

$$8)\quad (2Amq + Cq + Dm + E)\,x + Aq^2 + Dq + F = 0.$$

Dividiren wir diese Gleichung durch x, so erhalten wir

$$9)\quad 2Amq + Cq + Dm + E + \frac{Aq^2 + Dq + F}{x} = 0.$$

Nehmen wir in dieser Gleichung x unendlich groß an, so verschwindet das letzte Glied, und die Gleichung (9) verwandelt sich in

$$10)\quad 2Amq + Cq + Dm + E = 0,$$

woraus sich

$$11)\quad q = -\frac{Dm + E}{2Am + C}$$

ergibt. Wenn daher die Gleichung (1) einer Hyperbel angehört, so erhalten wir die Gleichungen ihrer Asymptoten, indem wir in die Gleichung

$$y = mx + q$$

die in den Gleichungen (7) und (11) für m und q gefundenen Werthe einsetzen.

Ist z. B. die Gleichung

$$\text{I.}\quad 5y^2 - 2x^2 + 3xy + 4y - 3x + 14 = 0$$

gegeben, also $A = 5$, $B = -2$, $C = 3$, $D = 4$, $E = -3$ und $F = 14$, dann ist vermöge der Gleichungen (7) und (11) entweder

$$m = +\tfrac{2}{5} \text{ und } q = +\tfrac{1}{5}$$

oder

$$m = -1 \text{ und } q = -1,$$

wonach wir für die Asymptoten die Gleichungen erhalten

$$\text{II.}\quad y = \tfrac{2}{5}x + \tfrac{1}{5} \text{ und } y = -x - 1$$

oder

$$5y - 2x = 1 \text{ und } y + x = -1.$$

Wenn wir nach diesen Gleichungen die Asymptoten in der Zeichnung darstellen, so können wir nun auch nach der Vorschrift des §. 115, Anm. 2, wenn wir vorher nach Gleichung (I.) irgend einen Punkt der Hyperbel festgestellt haben, diese selbst leicht zeichnen. Wir wollen jedoch auch noch für die in Rede stehende Hyperbel die einfachste Form ihrer Gleichung aufsuchen, indem wir die Asymptoten als Coordinatenaxen annehmen, wobei wir im folgenden um größerer Einfachheit willen annehmen, daß in der Gleichung (I.) x und y rechtwinklige Coordinaten vorstellen.

Aus den Gleichungen (II.) ergibt sich uns für den Durchschnittspunkt der Asymptoten, d. h. für den Mittelpunkt der Hyperbel

$$\text{die Abscisse} = -\frac{6}{7} \text{ und die Ordinate} = -\frac{1}{7}.$$

Verlegen wir zunächst bei ungeänderter Richtung der Axen den Anfangspunkt der Coordinaten in diesen Punkt, und bezeichner wir die neue Abscisse mit x', die neuen Ordinate mit y', so ist nach §. 10

$$x = x' - \frac{6}{7} \text{ und } y = y' - \frac{1}{7}$$

und die Gleichung (I.) verwandelt sich, wenn wir diese Werthe einsetzen, in

$$\text{III.}\quad 5y'^2 - 2x'^2 + 3x'y' + 15 = 0.$$

Verändern wir nun auch die Richtung der Coordinatenaxen, indem wir die eine Asymptote als Abscissen-, die andere als Ordinatenaxe annehmen, und bezeichnen wir die Coordinaten irgend eines Punktes auf der Hyperbel für diese neuen Axen mit u und v, dann ist nach §. 15

$$\text{IV.}\quad x = u\cos\alpha + v\cos\beta \text{ und } y = u\sin\alpha + v\sin\beta,$$

wenn wir mit α und β die (spitzen) Winkel bezeichnen, um welche die Asymptoten von der bisher angenommenen Abscissenaxe abweichen. Nehmen wir an, daß W. α derjenigen Asymptote, welche durch die erste der unter (II.) aufgeführten Gleichungen gegeben ist, W. β der andern Asymptote entspricht, so ist

$$\operatorname{tang}\alpha = \tfrac{2}{5},\ \text{also } \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}} \text{ und } \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}},$$

$$\operatorname{tang}\beta = -1,\ \text{also } \sin\beta = -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ und } \cos\beta = +\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

wonach die Gleichungen IV. übergehen in

$$\text{V.}\quad x' = \frac{5u}{\sqrt{29}} + \frac{v}{\sqrt{2}} \text{ und } y' = \frac{2u}{\sqrt{29}} - \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (III.) ein, so vereinfacht sich dieselbe in

$$uv = \frac{15\sqrt{58}}{49}.$$

Vermöge der Gleichung des §. 127 ergibt sich hieraus die Exzentricität

$$c = \frac{1}{14}\sqrt{15 \, . \sqrt{58}}.$$

Aus den unter (II.) aufgeführten Gleichungen der Asymptoten erhalten wir für den von denselben eingeschlossenen Winkel zufolge §. 28*) die Gleichung

$$\operatorname{tang} 2\omega = \frac{7}{3},$$

und vermöge der bekannten Gleichungen

$$\cos 2\omega = \frac{1}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang} 2\omega^2)}} \text{ und } \cos \omega = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\omega}{2}}$$

ergibt sich uns die halbe erste Axe der Hyperbel

$$a = c \, . \cos \omega = c \, . \sqrt{\frac{3 + \sqrt{58}}{2 \, . \sqrt{58}}} = \frac{1}{14} \, . \sqrt{\frac{15(3 + \sqrt{58})}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{30(3 + \sqrt{58})}}{28}.$$

3. Wie wir schon in den §. 55, Anm. 2, §. 89, Anm. 2 und §. 127, Anm. im einzelnen gezeigt haben können ein Kegelschnitt und eine Gerade niemals mehr als zwei Punkte gemeinschaftlich haben, und wir fügen hier noch den allgemeinen Grund hinzu, daß die Gleichung des Kegelschnitts vom zweiten, die der geraden Linie vom ersten Grade ist, und daß sich daher, wenn man diese Gleichungen nach x und y auflöst, um die Coordinaten der Durchschnittspunkte zu finden, für x und y niemals mehr, als zwei Werthe ergeben können. Dagegen können zwei Kegelschnitte, da die Gleichungen beider vom zweiten Grade sind und sich daher durch Auflösung derselben im allgemeinen für x und y vier Werthe ergeben, sich möglicher Weise in vier Punkten schneiden. So schneidet z. B. ein Kreis, welchen man um den Mittelpunkt einer Ellipse mit einem Radius beschreibt, der größer, als die halbe kleine, aber kleiner, als die halbe große Axe der Ellipse ist, dieselbe in vier Punkten u. dgl. m.

§. 144. Aufgabe.

Die Gleichung eines Kegelschnitts zu finden, welcher durch fünf Punkte geht, deren Coordinaten $= x_1y_1, x_2y_2 \ldots.$ gegeben sind, vorausgesetzt, daß nicht drei derselben in gerader Linie liegen.

Aufl. Da die Gleichung eines Kegelschnitts vom zweiten Grade ist, so wird dieselbe folgende Form haben müssen

$$y^2 + Bx^2 + Cxy + Dy + Ex + F = 0,$$

wo wir den ersten Coefficient = 1 angenommen haben, da es uns ja frei steht, wenn dieser Coefficient von 1 verschieden sein sollte, alle Glieder durch denselben zu dividiren, den einzigen so gleich noch näher zu erörternden Fall ausgenommen, daß der erste Coefficient = 0 sein sollte. Da der gesuchte Kegelschnitt durch die fünf gegebenen Punkte gehn soll, so werden die Coordinaten eines jeden derselben, wenn sie statt x und y gesetzt werden, der obigen Gleichung Genüge thun müssen, wodurch wir zur Bestimmung der fünf Coefficienten B, C, D, E, F fünf Gleichungen erhalten

*) Der dort mit ω ausgedrückte Winkel ist hier mit 2ω bezeichnet.

$$y_1^2 + Bx_1^2 + Cx_1y_1 + Dy_1 + Ex_1 + F = 0$$
$$y_2^2 + Bx_2^2 + Cx_2y_2 + Dy_2 + Ex_2 + F = 0$$

u. s. w. Diese Gleichungen sind sämmtlich in Beziehung auf die Unbekannten B, C, D, E, F vom ersten Grade und ihre Auflösung bietet daher nicht die mindeste Schwierigkeit dar. — Es mag indeß im besondern Falle sich auch wohl ereignen, daß einfache Gleichungen mit mehreren Unbekannten sich widersprechen; dies würde hier darauf hinweisen, daß man fälschlich den ersten Coefficienten als von Null verschieden angenommen hätte; man würde also diesen Coefficienten = 0 setzen und die übrigen dann eben so wie vorhin bestimmen.

1. Es seien z. B. die Coordinaten der fünf Punkte, durch welche ein Kegelschnitt gelegt werden soll, folgende:

$$x_1 = +3,\ x_2 = +2,\ x_3 = +4,\ x_4 = -2,\ x_5 = -1;$$
$$y_1 = +2,\ y_2 = -1,\ y_3 = -2,\ y_4 = +1,\ y_5 = -4.$$

Setzen wir die zusammengehörigen Werthe von y und x in die allgemeine Gleichung vom zweiten Grade

$$y^2 + Bx^2 + Cxy + Dy + Ex + F = 0,$$

so bekommen wir zur Bestimmung der Coefficienten B, C... F folgende fünf Gleichungen

$$\begin{aligned}
1)\quad & 4 + 9B + 6C + 2D + 3E + F = 0\\
2)\quad & 1 + 4B - 2C - D + 2E + F = 0\\
3)\quad & 4 + 16B - 8C - 2D + 4E + F = 0\\
4)\quad & 1 + 4B - 2C + D - 2E + F = 0\\
5)\quad & 16 + B + 4C - 4D - E + F = 0.
\end{aligned}$$

Eliminiren wir F zwischen diesen Gleichungen, indem wir mit (2) alle andern durch Subtraction verbinden, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
(1,2)\quad & 3 + 5B + 8C + 3D + E = 0\\
(2,3)\quad & 3 + 12B - 6C - D + 2E = 0\\
(2,4)\quad & + 2D - 4E = 0\\
(2,5)\quad & 15 - 3B + 6C - 3D - 3E = 0.
\end{aligned}$$

Setzen wir aus der Gleichung (2,4)

$$D = 2E$$

in die übrigen, so verwandeln sich dieselben nach der Reihe in

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad & 3 + 5B + 8C + 7E = 0\\
\text{II.}\quad & 1 + 4B - 2C = 0\\
\text{III.}\quad & 5 - B + 2C - 3E = 0.
\end{aligned}$$

Wenn wir nun E zwischen (I.) und (III.) eliminiren, so finden wir

$$(\text{I.},\text{III.})\quad 22 + 4B + 19C = 0.$$

Aus dieser und der Gleichung (II.) folgt

$$C = -1 \text{ und } B = -\tfrac{3}{4},$$

woraus sich dann leicht weiter ergibt

$$E = \tfrac{5}{4},\ D = \tfrac{5}{2} \text{ und } F = 0.$$

Demnach ist die Gleichung des durch die fünf gegebenen Punkte gehenden Kegelschnitts

$$y^2 - \tfrac{3}{4}x^2 - xy + \tfrac{5}{2}y + \tfrac{5}{4}x = 0,$$

und da in derselben $4AB - C^2 = -4 < 0$ ist, so gehört sie folglich einer Hyperbel an, deren nähere Erörterung wir dem Leser zur eigenen Uebung überlassen wollen.

2. Im Vorhergehenden hat man gesehen, daß sich durch fünf beliebige Punkte im allgemeinen ein Kegelschnitt legen läßt. Ob aber dieser Kegelschnitt eine Ellipse oder

eine Hyperbel wird, hängt von der gegenseitigen Lage der fünf gegebenen Punkte ab; es kann die Aufgabe daher auch nicht dahin gestellt werden, durch fünf gegebene Punkte eine Ellipse oder durch dieselbe eine Hyperbel zu legen; die Aufgabe muß vielmehr die Art des Kegelschnittes unbestimmt lassen und allgemein dahin lauten, durch fünf gegebene Punkte einen Kegelschnitt zu legen, da die Natur des durch dieselben zu legenden Kegelschnitts, wie schon angeführt, durch die gegenseitige Lage der fünf gegebenen Punkte bedingt wird.

Im besondern Fall kann aber auch der durch die fünf Punkte zu legende Kegelschnitt eine Parabel werden; dies wird dann eintreten, wenn eine durch vier der gegebenen Punkte gezogene Parabel auch durch den fünften Punkt geht. Denn die Parabel wird schon durch vier Punkte bestimmt, da zwischen den Coefficienten ihrer Gleichung nach §. 142 die Gleichung

$$4AB - C^2 = 0,$$

oder weil wir $A = 1$ angenommen haben,

$$4B - C^2 = 0$$

stattfindet, so daß man also nur noch vier Gleichungen zwischen den fünf Coefficienten der allgemeinen Gleichung vom zweiten Grade aufzusuchen hat. Da indeß die Gleichung

$$4AB - C^2 = 0$$

quadratisch ist, also eine doppelte Auflösung zuläßt, so werden sich durch vier Punkte in der Regel zwei Parabeln legen lassen.

Der Kreis wird bekanntlich durch drei Punkte bestimmt. Wird der Kreis auf rechtwinklige Coordinaten bezogen, so ist in der Gleichung desselben nach §. 30

$$B = A = 1 \text{ und } C = 0,$$

und es bleiben also in der allgemeinen Gleichung nur noch drei Coefficienten (D, E, F) unbestimmt, so daß drei Punkte, welche drei Gleichungen zwischen denselben liefern, zu ihrer Feststellung ausreichen*). Schließen die Coordinatenaxen einen schiefen Winkel ein, so müssen bei der Umformung in rechtwinklige Coordinaten die beiden ersten Coefficienten einander gleich werden und der dritte verschwinden, woraus sich zwei Gleichungen ergeben, welche in Verbindung mit den drei Gleichungen, welche die Coordinaten der drei gegebenen Punkte liefern, zur Bestimmung aller fünf Coefficienten ausreichen.

B. Von Polen und Polaren**).

*§. 145. Erklärung.

Wenn man durch einen festen Punkt irgend eine einen gegebenen Kegelschnitt durchschneidende gerade Linie zieht und zu den beiden Durchschnittspunkten, als conjugirten Punkten, und zu dem gegebenen Punkte den vierten harmonischen Punkt sucht, so wird der geometrische Ort dieses Punktes die Polare des festen Punktes, dieser selbst aber der zugehörige Pol genannt.

*§. 146. Lehrsatz.

Die Polare eines gegebenen Punktes ist eine gerade Linie, welche dem durch diesen Punkt gehenden Durchmesser conjugirt, (d. h. den von demselben halbirten Sehnen parallel) ist.

---

*) S. oben in der Anm. zu §. 34 Aufg. 3.

**) Wir empfehlen dem mit diesem Gegenstande noch nicht vertrauten Leser, sich vorher mit den elementaren Sätzen über harmonische Theilung nach irgend einem geometrischen Lehrbuche, z. B. nach des Verfassers Anfangsgründen der Planimetrie (§. 244 u. f.) bekannt zu machen.

Beweis. Wenn wir den gegebenen Punkt P, Fig. 60, als Anfangspunkt der Coordinaten, den durch denselben gehenden Durchmesser als Abscissenaxe und eine diesem Durchmesser conjugirte (d. h. den von demselben halbirten Sehnen parallele) und durch P gehende gerade Linie als Ordinatenaxe annehmen, so erhalten wir für den gegebenen Kegelschnitt (nach §. 139, 141 und 143) die Gleichung

$$1)\quad Ay^2 + Bx^2 + Ex + F = 0.$$

Denken wir uns nun durch P irgend eine den Kegelschnitt schneidende gerade Linie gezogen, so hat die Gleichung derselben die Form

$$2)\quad y = mx.$$

Bezeichnen wir mit x_1y_1 und x_2y_2 die Coordinaten der Punkte A und B, in denen die Gerade die Curve schneidet, so werden wir die Werthe derselben finden, wenn wir die beiden Gleichungen (1) und (2) nach x und y auflösen, da die Coordinaten der Durchschnittspunkte so wohl der einen, als auch der anderen dieser beiden Gleichungen Genüge leisten müssen. Eliminiren wir zunächst y, so erhalten wir die Gleichung

$$3)\quad x^2 + \frac{Ex}{Am^2 + B} + \frac{F}{Am^2 + B} = 0.$$

Da nach unserer Annahme x_1 und x_2 die Werthe von x bezeichnen, welche sich durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergeben, so muß nach einem bekannten Satze der Algebra*) sein:

$$4)\quad x_1 + x_2 = -\frac{E}{Am^2 + B} \text{ und } 5)\quad x_1x_2 = \frac{F}{Am^2 + B}.$$

Wir erhalten aber zufolge §. 145 den auf der Secante AB liegenden Punkt D der Polare, wenn wir zu A, B und P den vierten harmonischen Punkt suchen, so daß sich also verhält

$$PA : PB = DA : DB.$$

Bezeichnen wir die Abscisse des Punktes D mit u, so folgt aus der vorstehenden Proportion

$$x_1 : -x_2 = x_1 - u : x_2 - u^{**}),$$

woraus sich ergibt

$$6)\quad u = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2},$$

oder wenn wir die in (3) und (4) erhaltenen Werthe einsetzen:

$$7)\quad u = -\frac{2F}{E}.$$

Alle Punkte der Polaren haben also die nämliche Abscisse, welches auch immer der Winkel sein mag, den die durch den Pol P gezogene Secante mit der Abscissenaxe bildet; sie liegen folglich auf einer der Ordinatenaxe parallelen Linie LR, Fig. 60.

---

*) Arithmetik und Algebra §. 192.

**) Wenn man sich durch A, B und D Parallelen mit der Ordinatenaxe gezogen denkt, welche die Abscissenaxe in C, H und P′ durchschneiden, ferner durch B und D Parallelen mit der Abscissenaxe, welche DP′ und die verlängerte AC in K und N schneiden, und PC als den positiven Schenkel der Abscissenaxe annimmt, dann ist

$$x_1 = +PC,\ x_2 = -PH \text{ und } u = -PP',$$

folglich $$PA : PB = PC : PH = x_1 : Cx_2$$

und $$DA : DB = DN : BK = PC + PP' : PP' - PH = x_1 - u : x_2 - u,$$

also $$x_1 : -x_2 = x_1 - u : x_2 - u.$$

1. In Fig. 60 ist der Pol P innerhalb des Kegelschnitts angenommen; die obigen Entwicklungen behalten jedoch ihre volle Giltigkeit, wenn der Pol außerhalb des Kegelschnitts gelegt wird; sie verlieren jedoch ihre Brauchbarkeit, wenn ein auf dem Kegelschnitte selbst liegender Punkt als Pol angenommen wird, da ja zu zwei Punkten kein vierter harmonischer Punkt gesucht werden kann. (Vergl. übrigens unter §. 148.) Von der Polare kann ferner keine Rede sein, wenn der Pol in den Mittelpunkt einer Ellipse oder Hyperbel gelegt wird, da jeder Durchmesser im Mittelpunkte halbirt ist und der vierte harmonische Punkt dann ins Unendliche hinausrückt. Wird der Mittelpunkt als Pol angenommen, so ist in Gleichung (1) $E = 0$ und in Gleichung (7) wird folglich $u = \infty$.

2. Um den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, haben wir bei der Ableitung der Gleichung (3) stillschweigend vorausgesetzt, daß $Am^2 + B$ nicht gleich Null ist, was jedoch in den folgenden drei Fällen eintreten kann: 1) wenn A und B beide gleich Null sind; dann gehört aber die Gleichung (1) nicht mehr einer krummen, sondern einer geraden Linie an; 2) wenn $m^2 = -\frac{B}{A}$ ist, was offenbar voraussetzt, daß A und B verschiedene Vorzeichen haben und die Gleichung (1) also einer Hyperbel angehört; dann ist der Quotient $-\frac{B}{A} = \tang \omega^2$, wo ω den Winkel bedeutet, unter welchen die Asymptoten die Hauptaxe schneiden; die durch den Punkt P, Fig. 60, gehende Gerade ist also in diesem Falle der Asymptote parallel und kann folglich (nach §. 127, Anm.) die Hyperbel nicht in zwei, sondern nur in einem Punkte schneiden; endlich 3) wenn in der Gleichung (1) $B = 0$ ist und m ebenfalls $= 0$ angenommen wird; dann gehört die Gleichung (1) einer Parabel an und die durch P gehende Gerade ist der Axe der Parabel parallel und schneidet folglich (nach §. 55, Anm. 2) dieselbe nur in einem Punkte.

3. Die Gleichung (1) des Haupttextes umfaßt zwar sämmtliche Kegelschnitte mit der einzigen Ausnahme, wenn bei einer Hyperbel der Pol, also der Anfangspunkt der Coordinaten, auf einer Asymptote angenommen wird, da durch diese niemals Sehnen der Hyperbel halbirt werden. Wir haben daher, um ganz gründlich zu verfahren, diesen Fall noch besonders zu erörtern. Bezeichnen wir den Abstand des Poles vom Mittelpunkte mit d, nehmen wir die Asymptote, auf welcher der Pol liegt, als Abscissenaxe und eine durch den Pol mit der andern Asymptote parallel gezogene Gerade als Ordinatenaxe an, so erhalten wir für die Hyperbel, wenn wir die lineare Excentricität mit c bezeichnen, nach §. 114 und 8 die Gleichung

$$1)\quad (x + d)\,y = \tfrac{1}{4}c^2,$$

welche der Gleichung (1) des Haupttextes entspricht. Befolgen wir nun weiter ganz denselben Gang der Entwicklung wie in diesem, und wenden wir die nämlichen Bezeichnungen an, so ergeben sich uns weiter folgende Gleichungen

$$2)\quad y = mx \qquad 3)\quad x^2 + dx - \frac{c^2}{4m} = 0,$$

$$4)\quad x_1 + x_2 = -d, \qquad 5)\quad x_1 x_2 = \frac{c^2}{4m},$$

$$6)\text{ u. }7)\quad u = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{c^2}{2dm}.$$

Bezeichnen wir dann noch die zu der Abscisse u gehörige Ordinate des gesuchten geometrischen Ortes mit v, so ergibt sich uns, da der betreffende Punkt auch auf der durch Gleichung (2) repräsentirten Linie liegen muß,

$$8)\quad v = mu = \frac{c^2}{2d}.$$

Die gesuchte Polare ist folglich eine mit der Asymptote, auf welcher der Pol liegt, parallele gerade Linie, welche die andere Asymptote in einem Punkte schneidet, dessen Ordinate durch die Gleichung (8) gegeben ist.

Wenn wir die Ordinate des Punktes aufsuchen, in welchem die Hyperbel selbst die Ordinatenaxe schneidet, so haben wir in der Gleichung (1) $x = 0$ zu setzen; wir erhalten dann

$$y = \frac{c^2}{4d} = \tfrac{1}{2}v.$$

Um daher zu einem auf einer Asymptote als Pol gegebenen Punkte die zugehörige Polare zu construiren, ziehen wir durch diesen Punkt eine der anderen Asymptote Parallele bis an die Hyperbel, verlängern dieselbe um ihre eigene Länge und ziehen durch den so erhaltenen Endpunkt mit der Asymptote, auf welcher der Pol liegt, eine Parallele, welches die gesuchte Polare ist. Dieselbe rückt daher um so weiter hinaus, je weniger der gegebene Punkt vom Mittelpunkte absteht, und sie nähert sich der Asymptote, auf welcher der gegebene Punkt liegt, wenn sich derselbe vom Mittelpunkt entfernt.

4. Der obige Satz liefert uns auch die Mittel zur Auflösung der folgenden

Aufgabe. Zu fünf gegebenen Punkten A, B, C, D, E, Fig. 61 einen sechsten zu finden.

Aufl. Man ziehe zwischen den gegebenen Punkten zwei Verbindungslinien AD und CE, suche zu A und D und dem Durchschnittspunkt F den vierten harmonischen Punkt G und eben so zu C, E und F den vierten harmonischen Punkt H; so ist GH die Polare des Punktes F. Zieht man dann noch eine Linie durch B und F, welche GH in K schneidet, und sucht zu B, F, K den vierten harmonischen Punkt L, so muß dieser auf dem durch die Punkte A, B, C, D, E gehenden Kegelschnitte liegen.

*§. 147. Zusatz.

1) Die Polare kann niemals, wie auch immer der Pol angenommen werden mag, ein Durchmesser werden. — Denn wenn zunächst die Gleichung (1) des §. 146

$$1)\quad Ay^2 + Bx^2 + Ex + F = 0$$

einer Ellipse oder Hyperbel angehört, so erkennt man leicht, daß, wenn man dieser Gleichung die folgende Form

$$Ay^2 + B\left(x + \frac{E}{2B}\right)^2 + F - \frac{E^2}{4B} = 0$$

gibt, die Abscisse des Mittelpunktes

$$= -\frac{E}{2B}$$

ist. Es müßte daher vermöge der Gleichung (7) des §. 146, wenn die Polare ein Durchmesser sein, also durch den Mittelpunkt gehen sollte,

$$-\frac{2F}{E} = -\frac{E}{2B}, \text{ also } F = \frac{E^2}{4B}$$

sein, wonach sich die Gleichung (1) verwandeln würde in

$$Ay^2 + B\left(x + \frac{E}{2B}\right)^2 = 0.$$

Durch diese Gleichung wird aber, wie in §. 140 gezeigt ist, kein Kegelschnitt, sondern entweder ein Punkt, wenn A und B beide positiv oder beide negativ sind, oder es werden durch dieselbe zwei die Abscissenaxe in dem nämlichen Punkte und unter gleichen Winkeln schneidende gerade Linien repräsentirt*).

Die Polare eines gegebenen Punktes kann auch bei der Parabel niemals mit einem Durchmesser zusammenfallen, weil sie nach §. 146 den Sehnen parallel ist, welche von dem durch den Pol gehenden Durchmesser halbirt werden. Da die Polare also diesen Durchmesser ebenfalls durchschneiden muß, so kann sie selbst kein Durchmesser sein, indem bei der Parabel alle Durchmesser nach §. 54, 1 wieder parallel sind.

2) Wenn die Gleichung (1) des §. 146 einer Parabel angehört, so ist (zufolge §. 139) der Coefficient $B = 0$, und dieselbe vereinfacht sich dann in

$$Ay^2 + Ex + F = 0.$$

Wir erhalten aus dieser Gleichung, wenn wir $y = 0$ setzen, die Abscisse des Punktes, in welchem die Parabel den als Abscissenaxe angenommenen Durchmesser schneidet,

$$x = -\frac{F}{E}.$$

In der Gleichung (7) des §. 146 haben wir die Abscisse des Punktes, in welchem die Polare diesen Durchmesser schneidet,

$$u = -\frac{2F}{E}$$

gefunden. Der Einschnittspunkt (P′) der Polare (LR, Fig. 60) in den durch den Pol gehenden Durchmesser (PP′) ist daher doppelt so weit als der Einschnittspunkt (G) der Parabel in diesen Durchmesser von dem Pole (P) entfernt, wonach sich bei der Parabel durch eine höchst einfache Construction die zu einem gegebenen Pole gehörende Polare erhalten läßt, da dieselbe zufolge §. 146 dem durch den Pol gehenden Durchmesser conjugirt ist.

Bei der Ellipse oder Hyperbel erhalten wir die Polare eines gegebenen Poles am bequemsten auf die Art, daß wir durch den Pol einen Durchmesser ziehen zu den Punkten, in welchen derselbe die Curve schneidet, und zu dem Pole den vierten harmonischen Punkt suchen und durch diesen eine dem vorhin gezogenen Durchmesser conjugirte gerade Linie ziehen.

Diese Construction kann jedoch bei der Hyperbel unausführbar werden, wenn nämlich der durch den Pol gehende Durchmesser in die Curve nicht einschneidet, ein Fall, der dann eintritt, wenn der Pol in einem der vier von den Asymptoten eingeschlossenen Winkel liegt, in welchem die Hyperbel-

*) Wenn man diesen Fall mit in die Betrachtung aufnehmen will, so liegt der Pol auf der Halbirungslinie des Winkels, welchen die gegebenen Linien einschließen, und die Polare geht durch den Scheitelpunkt dieses Winkels und steht auf der Halbirungslinie desselben senkrecht (S. Planimetrie §. 252). Wenn überhaupt durch die Gleichung (1) zwei gerade Linien repräsentirt werden und wir die vorhergehenden Entwicklungen auch auf diesen Fall anwenden, so erhalten wir als Polare eine gerade Linie, welche durch den Durchschnittspunkt der gegebenen Linien geht und parallel ist derjenigen Linie, welche, durch den Pol und bis an die gegebenen Linien gezogen, in dem Pole halbirt wird. (S. Planimetrie §. 250.)

äste nicht liegen. Wir ziehen dann außer dem Durchmesser noch irgend eine die Hyberbel durchschneidende Gerade, suchen zu den Einschnittspunkten und dem Pole den vierten harmonischen Punkt und ziehen durch diesen eine dem Durchmesser conjugirte gerade Linie.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich auch noch leicht die Richtigkeit der folgenden Behauptungen:

Liegt der Pol innerhalb der Parabel oder Ellipse, so liegt die Polare ganz außerhalb der Curve; wird dagegen der Pol außerhalb der Parabel oder Ellipse angenommen, so wird die Curve von der Polare durchschnitten. — Allemal liegen bei der Ellipse Pol und Polare an derselben Seite des Mittelpunktes.

Liegt bei der Hyperbel der Pol innerhalb eines Hyperbelastes, so geht die Polare zwischen diesem Aste und dem Mittelpunkte durch und schneidet weder diesen, noch den andern Hyperbelast. Liegt der Pol in einem der vier von den Asymptoten eingeschlossenen Winkel, in welchem ein Hyperbelast liegt, aber außerhalb dieses Astes, so schneidet die Polare diesen Ast in zwei Punkten. Liegt endlich der Pol in einem jener vier Winkel, in denen kein Hyperbelast liegt, so schneidet die Polare beide Hyperbeläste, und sie schneidet den durch den Pol gehenden Durchmesser jenseits des Mittelpunktes *).

*§. 148. Zusatz.

Wenn wir auf einem einen Kegelschnitt durchschneidenden Durchmesser einen Punkt P, Fig. 60, als Pol annehmen, so ist der Einschnittspunkt P' der Polare LR in diesen Durchmesser von dem Punkte G, in welchem derselbe von dem Kegelschnitte durchschnitten wird, um so weniger entfernt, je näher wir den Pol P diesem Punkte G angenommen haben. Die Polare LR nähert sich daher um so mehr der durch G gehenden Tangente, je näher der Punkt P dem Punkte G kommt, und die Polare fällt mit dieser Tangente zusammen, wenn der Punkt P auf G, also auf den Kegelschnitt selbst fällt.

*§. 149. Zusatz.

Bei allen drei Kegelschnitten ist die Directrix DJ, Fig. 62, die Polare des Brennpunktes F. — Ziehen wir nämlich durch den Brennpunkt F irgend eine gerade Linie, welche den Kegelschnitt in A und B und die Directrix in C schneidet, ferner die Linien FG, AH und BK senkrecht zur Directrix, so verhält sich bei allen drei Kegelschnitten nach §. 32, 97 und 136

$$AF : AH = e : 1 = BF : BK,$$

wo bei der Parabel $e = 1$, bei der Ellipse $e < 1$ und bei der Hyperbel $e > 1$ ist. Weiter verhält sich aber

$$AH : AC = BK : BC,$$

und wenn wir diese Proportion mit der vorhergehenden multipliciren,

$$AF : AC = BF : BC.$$

Die vier Punkte A, B, C und F sind folglich harmonische.

*§. 150. Lehrsatz.

Wenn man mit der Polare LR, Fig. 60, durch den zugehörigen Pol P eine Parallele L'R' zieht, so ist diese die Polare des

---

*) Der Fall, daß der Pol auf einer Asymptote der Hyperbel liegt, ist in der Anm. 3 zu §. 146 besonders behandelt.

Punktes P', in welchem der durch den Punkt P gehende Durchmesser die gegebene Polare LR schneidet.

Beweis. Wir erhielten in §. 146 für den Kegelschnitt die Gleichung

$$1)\quad Ay^2 + Bx^2 + Ex + F = 0$$

und für die Abscisse des Punktes P', in welchem die Polare LR den durch den Pol P gehenden Durchmesser schneidet,

$$u = -\frac{2F}{E}.$$

Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten bei ungeänderter Richtung der Axen in diesen Punkt, so bleibt die Ordinate y für alle Punkte des Kegelschnittes dieselbe, und nur die Abscisse ändert sich. Bezeichnen wir die Abscisse irgend eines Punktes für diesen neuen Anfangspunkt mit x', so ist nach §. 8

$$x = x' - \frac{2F}{E}.$$

Setzen wir diesen Werth in die Gleichung (1) ein, so erhalten wir nach einiger Reduction

$$\text{I.}\quad Ay^2 + Bx'^2 - \left(\frac{4BF - E^2}{E}\right) x' + \frac{(4BF - E^2)}{E^2} F = 0,$$

eine Gleichung, welche der Gleichung (1) durchaus conform ist. Wir erhielten aus der Gleichung (1) die Abscisse u des Punktes, in welchem die Polare den durch den Pol gehenden Durchmesser schneidet, indem wir das negativ und doppelt genommene von x und y freie Glied durch den Coefficienten von x dividirten. Bezeichnen wir nun mit u' die Abscisse des Punktes, in welchem die zu dem Pole P' gehörende Polare den durch P' gehenden Durchmesser schneidet, so ergibt sich uns, wenn wir diese Regel auf die Gleichung (I.) anwenden,

$$u' = +\frac{2F}{E}.$$

Dieser Ausdruck ist aber zufolge des Obigen die Abscisse des Poles P, wenn der Punkt P' als Anfangspunkt der Coordinaten angenommen wird.

Es hätte des eben geführten Beweises dieses Satzes für die Parabel und Ellipse nicht bedurft, da die Richtigkeit desselben unmittelbar aus §. 147 hervorgeht. Dasselbe gilt auch von der Hyperbel, wenn der Pol in einem der vier von den Asymptoten gebildeten Winkel liegt, welcher einen Ast derselben enthält, da dann der durch den Pol gehende Durchmesser die Curve in zwei Punkten schneidet. Dieses ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn der Pol in einen der beiden Winkel fällt, in denen kein Curvenast liegt, und um diesen Fall nicht unerledigt zu lassen, haben wir den obigen ganz allgemein gehaltenen Beweis ausgeführt, welcher nicht bloß jede beliebige Lage des Poles bei der Hyperbel, sondern eben so auch bei der Parabel und Ellipse umfaßt.

*§. 151. Lehrsatz.

Die Polaren aller Punkte einer geraden Linie, (welche kein Durchmesser eines Kegelschnittes ist,) schneiden sich in demselben Punkte, nämlich in dem Pole dieser Linie.

Beweis. Die gegebene Linie sei LR, Fig. 63, der Pol derselben P. Wenn wir durch diesen Punkt zu LR eine Parallele L'R' ziehen, so ist diese

nach §. 150 die Polare des Punktes P', in welchem die gegebene Linie LR von dem conjugirten Durchmesser PP' durchschnitten wird. Nehmen wir nun den Punkt P' als Anfangspunkt der Coordinaten, den durch denselben gehenden Durchmesser als Abscissenaxe und eine den conjugirten Sehnen Parallele als Ordinatenaxe an, so hat die allgemeine alle Kegelschnitte umfassende Gleichung die Form

$$1)\quad Ay^2 + Bx^2 + Ex + F = 0.$$

In §. 146 fanden wir die Abscisse des Punktes P, in welchem die Polare L'R' des Poles P' die Abscissenaxe schneidet,

$$u = -\frac{2F}{E}\text{*)}.$$

Wenn wir nun weiter auf der Linie LR einen willkührlichen Punkt p annehmen, dessen Ordinate wir mit d bezeichnen, und uns durch denselben eine beliebige Linie gezogen denken, so hat die Gleichung derselben die Form

$$2)\quad y = mx + d.$$

Bezeichnen wir ferner, eben so wie in §. 146, mit x_1 und x_2 die Abscissen der Punkte, in welchen diese Linie den Kegelschnitt durchschneidet, und befolgen wir in der weiteren Entwicklung den nämlichen Gang, wie dort, so erhalten wir zunächst durch Elimination von y zwischen der Gleichung (1) und (2)

$$3)\quad x^2 + \frac{(2Adm + E)x}{Am^2 + B} + \frac{Ad^2 + F}{Am^2 + B} = 0,$$

also $4)\quad x_1 + x_2 = -\left(\frac{2Adm + E}{Am^2 + B}\right)$ und $5)\quad x_1x_2 = \frac{Ad^2 + F}{Am^2 + B}$,

folglich wenn wir mit u und v die Abscisse und Ordinate des vierten harmonischen Punktes zu dem willkührlich auf LR angenommenen Punkte p und zu den Punkten, in denen die durch denselben beliebig gezogene Gerade den Kegelschnitt schneidet, bezeichnen,

$$6)\quad u = -\frac{(2Ad^2 + 2F)}{2Adm + E},$$

und da der vierte harmonische Punkt auf dieser Geraden liegt, für welche wir oben die Gleichung (2) angenommen haben,

$$7)\quad v = mu + d.$$

Eliminiren wir m zwischen den Gleichungen (6) und (7), so erhalten wir für die Polare lr des auf LR angenommenen Punktes p die Gleichung

$$8)\quad 2Adv + Eu = -2F.$$

Setzen wir in dieser Gleichung v = 0, so finden wir die Abscisse des Punktes, in welchem diese Polare die Abscissenaxe schneidet,

$$u = -\frac{2F}{E}.$$

Dieselbe schneidet also die Abscissenaxe im Punkte P, d. h. im Pole der Linie LR.

Wie leicht aus §. 146 hervorgeht, sind die **Polaren der verschiedenen Punkte eines Durchmessers demselben conjugirte gerade Linien.**

Eben so sind zufolge der Anm. 3 zu §. 146 die Polaren der verschiedenen Punkte einer Asymptote der Hyperbel dieser Asymptote parallele Linien.

---

*) Die Entwicklungen des §. 146 gelten eben so wohl für einen außerhalb, als für einen innerhalb des Kegelschnittes angenommenen Pol.

*§. 152. Zusatz.

Die Pole aller sich in einem Punkte P, Fig. 63, schneidenden Linien liegen auf einer geraden Linie, nämlich auf der Polare LR dieses Punktes.

Beweis. Wenn wir durch den Punkt P eine beliebige gerade Linie lr und zu derselben den conjugirten Durchmesser pp' ziehen, welcher LR in p durchschneidet, so ist der Punkt p der Pol von lr; denn die Polare von p muß nach dem vorherg. §. durch P' gehn und nach §. 146 dem durch p gehenden Durchmesser conjugirt sein.

Die Pole paralleler Linien liegen (nach §. 146 u. §. 150) auf dem denselben conjugirten Durchmesser. Bei der Parabel dürfen jedoch diese Linien nach §. 147, 1 nicht der Axe parallel sei. In Hinsicht solcher Linien, welche bei der Hyperbel einer Asymptote parallel sind, ist die Anm. 3 zu §. 146 zu vergleichen.

*§. 153. Lehrsatz.

Wenn aus einem außerhalb eines Kegelschnittes liegenden Punkte zwei Tangenten an denselben gezogen sind, so ist die Berührungssehne*) die Polare dieses Punktes.

Beweis. Wenn wir den durch den gemeinschaftlichen Punkt der Tangente gehenden Durchmesser als Abscissenaxe und eine durch denselben Punkt gehende und den conjugirten Sehnen des Durchmessers parallele Linie als Ordinatenaxe, also den Durchschnittspunkt der Tangente als Anfangspunkt der Coordinaten annehmen, so hat die allgemeine alle Kegelschnitte umfassende Gleichung die Form

$$1)\quad Ay^2 + Bx^2 + Ex + F = 0,$$

und eine durch den Durchschnittspunkt der Tangenten gezogene gerade Linie ist durch die Gleichung

$$2)\quad y = mx$$

repräsentirt. Die Abscisse eines beiden gemeinschaftlichen Punktes ergibt sich, wenn wir den Werth von y aus (2) in (1) einsetzen und die so entstandene und geordnete Gleichung

$$x^2 + \frac{Ex}{Am^2 + B} + \frac{F}{Am^2 + B} = 0$$

auflösen. Wir erhalten dann

$$x = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4F(Am^2 + B)}}{2(Am^2 + B)}.$$

Der doppelte Werth von x weist darauf hin, daß die Curve und die Gerade im allgemeinen zwei Punkte gemeinschaftlich haben. Diese beiden Punkte fallen jedoch in einem zusammen, die Secante geht in die Tangente über, wenn der Wurzelausdruck verschwindet, also

$$Am^2 + B = \frac{E^2}{4F}$$

ist. Wir erhalten so für die Abscisse des Berührungspunktes den einen Werth

$$x = -\frac{2F}{E}.$$

---

*) Die Sehne, welche die Berührungspunkte verbindet.

Da dieser Werth von x sowohl für die eine, als auch für die andere Tangente gilt, also beide Berührungspunkte die nämliche Abscisse haben, so ist die Berührungssehne der Ordinatenaxe parallel*) und folglich dem durch den Durchschnittspunkt der Tangente gehenden Durchmesser conjugirt. Nach §. 146 ist die Polare eines gegebenen Punktes ebenfalls dem durch denselben gezogenen Durchmesser conjugirt, und in demselben §. erhielten wir für die Abscisse ihres Einschnittspunktes in diesen Durchmesser genau denselben Werth, welchen wir so eben für den Durchschnittspunkt der Berührungssehne erhalten haben. Die Polare des gemeinschaftlichen Punktes zweier Tangenten fällt folglich mit ihrer Berührungssehne zusammen.

***§. 155. Zusatz.**

Aus dem vorherg. §. und §. 151 und 152 folgt unmittelbar: 1) Wenn durch einen innerhalb oder außerhalb eines Kegelschnittes liegenden Punkt mehrere Secanten gezogen sind, so liegen die Durchschnittspunkte je zweier Tangenten, deren Berührungspunkte in die nämliche Secante fallen, auf einer geraden Linie, nämlich auf der Polare des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes der Secanten.

2) Wenn aus verschiedenen Punkten einer geraden Linie, (welche kein Durchmesser ist,) Tangentenpaare an einen Kegelschnitt gezogen sind, so schneiden sich die Berührungssehnen sämmtlich in einem Punkte, nämlich in dem Pole jener Linie.

Sind aus verschiedenen Punkten eines Durchmessers Tangentenpaare an einen Kegelschnitt gezogen, so sind die Berührungssehnen einander parallel, wie einerseits aus §. 150 folgt, andererseits auch schon aus den §§. 54, 78 Anm. und §. 119 hervorgeht.

Achter Abschnitt.

Von den Schnitten des Kegels.

---

§. 156. Erklärung.

Eine Kegelfläche entsteht, wenn man in einer Ebene eine Kreislinie — Richtlinie oder Directrix — beschreibt, außerhalb der Ebene einen Punkt — Spitze — annimmt, durch diesen Punkt und einen Punkt der Richtlinie eine beiderseits unbegrenzte gerade Linie**) legt und diese Linie längs der Richtlinie so hinführt, daß sie zugleich fortwährend durch die Spitze geht. — Die Kegelfläche hat hiernach die Eigenschaft, daß eine durch die Spitze und einen Punkt der Richtlinie gezogene Gerade — Seitenlinie — ganz in die Kegelfläche fällt. — Die Linie von der Spitze nach dem Mittelpunkt der Richtlinie gezogen heißt Axe, und die Kegelfläche wird gerade

---

*) Was auch im einzelnen bereits in den §§. 54, 78 und 119 nachgewiesen worden ist.

**) Die Kegelfläche erstreckt sich also in ähnlicher Art wie Scheitelwinkel von der Spitze aus nach zwei entgegengesetzten Richtungen ins Unendliche.

oder schief genannt, je nachdem die Axe auf der Ebene der Richtlinie senkrecht oder schief steht.

§. 157. Zusatz.

Aus der vorstehenden Erklärung ergibt sich leicht die Richtigkeit der folgenden Sätze:

1) Eine Ebene, welche durch die Spitze und zwei Punkte der Richtlinie gelegt wird, schneidet die Kegelfläche in zwei geraden Linien.

2) Wenn man eine Ebene durch die Spitze und eine Tangente der Richtlinie legt, so berührt dieselbe die Kegelfläche in einer geraden Linie.

3) Eine durch die Spitze einer Kegelfläche gelegte Ebene hat mit derselben nur diesen einen Punkt gemeinschaftlich, wenn sie die Ebene des Richtkreises in einer geraden ganz außerhalb desselben liegenden Linie durchschneidet.

4) Jede mit der Ebene der Richtlinie parallele Ebene durchschneidet die Kegelfläche in einer Kreislinie, deren Mittelpunkt in der Axe liegt.

§. 158. Lehrsatz.

Wenn eine gerade Kegelfläche von einer Ebene, welche nicht durch die Spitze geht, durchschnitten wird und man legt durch die Axe eine auf die gegebene Ebene senkrechte Ebene, welche zufolge des vorherg. §. die Kegelfläche in zwei Seitenlinien durchschneidet, so können folgende drei Fälle stattfinden:

1) die gegebene Ebene ist einer der entstandenen Seitenlinien parallel, und der Durchschnitt derselben mit der Kegelfläche ist eine Parabel, oder

2) die Ebene schneidet beide Seitenlinien an der nämlichen Seite der Spitze, und ihr Durchschnitt mit der Kegelfläche ist eine Ellipse, oder

3) sie schneidet die beiden Seitenlinien an entgegengesetzten Seiten der Spitze, und der entstandene Kegelschnitt ist eine Hyperbel.

Beweis 1) Der Durchschnitt der gegebenen Ebene mit der Kegelfläche sei OAP, Fig. 64, die durch die Spitze gehende und zu jener senkrechte Ebene schneide dieselbe in AL und die Kegelfläche in den Seitenlinien CM und CN, und die Ebene OAP sei zunächst der einen Seitenlinie CM parallel und folglich auch die Durchschnittslinie AL || CM*); dann soll der Durchschnitt OAP eine Parabel sein. Um dieses zu zeigen, legen wir durch einen beliebigen Punkt E in demselben eine zur Ebene der Richtlinie parallele Ebene GEH, welche die gegebene Durchschnittsebene OAP in EDF und die Ebene MCN in GDH durchschneidet. Da die Ebene GEH mit der Ebene der Richtlinie parallel und daher auf der Axe, also auch auf der durch die Axe gehenden Ebene MCN senkrecht ist**), und da zufolge der Construction auch die Ebene OAP auf der Ebene MCN senkrecht ist, so muß auch die Durchschnittslinie EF der Ebenen OAP und GEH auf der Ebene GCH***), also auf AD und GH senkrecht stehn. Bezeichnen wir nun AD mit x und DE

*) Anfangsgründe der Stereometrie §. 9.
**) A. a. O. §. 70.
***) A. a. O. §. 71.

mit y, so gelangen wir zu einer Gleichung zwischen diesen rechtwinkligen Coordinaten durch folgende Ueberlegung: Da GEH ein Halbkreis ist, so ist

$$DE^2 = y^2 = DG \,.\, DH.$$

Wird AB ∥ DG gezogen, so ist DG = AB, und da △ DAH ∾ BCA ist, so verhält sich

$$DH : AD = AB : BC = AB : AC,$$

also ist

$$DH = \frac{AD \,.\, AB}{AC} = \frac{AB \,.\, x}{AC}$$

und folglich

$$y^2 = \frac{AB^2}{AC} \,.\, x.$$

Da AB und AC als unveränderlich und gegeben angesehen werden können, so gehört diese Gleichung offenbar einer Parabel an, welche

$$1)\quad \frac{AB^2}{AC} = 2p$$

zum Parameter hat.

2) Es sei eben so wie vorhin construirt, aber die Durchschnittsebene LFAE, Fig. 65, schneide beide Seitenlinien CM und CN in den Punkten A und L, welche an der nämlichen Seite der Spitze liegen. Dann ist zunächst, wie vorhin,

$$y^2 = DE^2 = DG \,.\, DH.$$

Weiter ist △ DGL ∾ ABL, daher

$$DG : DL = AB : AL, \quad \text{also} \quad DG = \frac{(AL - x) \,.\, AB}{AL},$$

und wenn noch LK ∥ GH gezogen wird,

$$DH : AD = KL : AL, \quad \text{also} \quad DH = \frac{x \,.\, KL}{AL}.$$

Demnach ist:

$$y^2 = \frac{AB \,.\, KL}{AL^2}(AL \,.\, x - x^2).$$

Diese Gleichung, in welcher AB, AL und KL als gegeben anzusehen sind, gehört einer Ellipse an, deren einer Scheitel als Anfangspunkt angenommen ist. Denn wenn man

$$2)\quad AL = 2a \quad \text{und} \quad AB \,.\, KL = 4b^2$$

setzt, so erhält die vorstehende Gleichung die folgende Form:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

welche genau mit der Gleichung des §. 92 übereinstimmt.

3) Wenn endlich die Durchschnittsebene FEAL, Fig. 66, die Seitenlinien MC und NC in zwei Punkten A und L schneidet, welche an entgegengesetzten Seiten der Spitze C liegen und alle andern Bestimmungen dieselben bleiben, wie in den schon betrachteten Fällen, so ist

$$y^2 = DE^2 = DG \,.\, DH,$$

ferner wegen AB ∥ DG

$$DG : DL = AB : AL, \quad \text{also} \quad DG = \frac{(x + AL) \,.\, AB}{AL},$$

und da △ ADH ∾ ALK ist,

$$DH : AD = KL : AL, \quad \text{also} \quad DH = \frac{x \,.\, KL}{AL}.$$

Hieraus ergibt sich $y^2 = \frac{AB \cdot KL}{AL^2}(AL \cdot x + x^2)$,
wo AB, AL und KL als gegeben betrachtet werden können. Wird daher

$$3)\ AL = 2a \quad \text{und} \quad AB \cdot KL = 4b^2$$

gesetzt, so verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

eine Gleichung, welche zufolge §. 130 einer auf den einen Scheitel als Anfangspunkt bezogenen Hyperbel angehört.

§. 159. Zusatz.

Wenn wir die Ebene MCN, Fig. 64, 65 u. 66, als gegeben ansehen, so wird offenbar die Lage der Ebene FAE gegen jene Ebene durch die Linie AC und den Winkel DAH bestimmt. Setzen wir nun der Kürze wegen

$$AC = d,\ \text{W. } DAH = \beta \text{ und W. } BCA = \alpha,$$

so müssen sich mit Hilfe dieser Stücke alle anderen beständigen Linien ausdrücken lassen. So ist zunächst

$$\tfrac{1}{2}AB = AC \sin \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \text{also} \quad AB = 2d \sin \tfrac{1}{2}\alpha,$$

folglich der Parameter der Parabel

$$1)\ 2p = 4d \sin \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Weiter ist für die Ellipse, bei welcher $\beta > \alpha$ ist, in dem Dreieck ALC, Fig. 65,

$$AL : AC = \sin ACL : \sin ALC = \sin \alpha : \sin(\beta - \alpha),$$

also

$$AL = \frac{d \cdot \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

und in dem Dreieck ALK

$$KL : AL = \sin KAL : \sin AKL = \sin \beta : \cos \tfrac{1}{2}\alpha,$$

also

$$KL = \frac{AL \cdot \sin \beta}{\cos \frac{1}{2}\alpha} = \frac{2d \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Aus diesen Bestimmungen ergibt sich

$$2)\ 2a = AL = \frac{d \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

und

$$3)\ 2b = \sqrt{AB \cdot KL} = 2d \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cdot \sqrt{\frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}}.$$

Ganz eben so findet man für die Hyperbel, bei welcher $\beta < \alpha$ ist, indem man durchgehends $\alpha - \beta$ statt $\beta - \alpha$ schreibt:

$$4)\ 2a = \frac{d \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)},$$

$$5)\ 2b = 2d \sin \tfrac{1}{2}\alpha \sqrt{\frac{\sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}}.$$

*§. 160. Lehrsatz.

Die krumme Linie, in welcher eine beliebige (schiefe oder gerade) Kegelfläche von einer Ebene, welche nicht durch die Spitze geht, durchschnitten wird, ist entweder eine Parabel oder eine Ellipse oder eine Hyperbel.

Beweis. Wenn die Durchschnittsebene der Ebene der Directrix parallel ist, so ist der Durchschnitt nach §. 157. 4. ein Kreis, also ein spe-

zieller Fall der Ellipse. Wenn aber die Durchschnittsebene die Ebene der Directrix durchschneidet, so ziehen wir, um die Art der entstandenen Durchschnittscurve zu bestimmen, aus dem Mittelpunkte der Directrix O, Fig. 67, auf die entstandene Durchschnittslinie PQ eine senkrechte Linie OR und legen durch OR und die Spitze C eine Ebene, welche die Kegelfläche in den Seitenlinien CM und CN durchschneidet, dann ist der Durchschnitt LFAE der gegebenen Ebene mit der Kegelfläche eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel, je nachdem die Durchschnittsebene mit einer dieser Seitenlinien parallel ist oder beide an derselben Seite oder an entgegengesetzten Seiten der Spitze schneidet. Denn wenn man eben so, wie in §. 158, durch einen beliebigen Punkt E des Durchschnitts eine zur Ebene der Richtlinie parallele Ebene legt, welche die Ebene MCN in GH und die gegebene Ebene in EF durchschneidet, so sind die Durchschnittslinien GH und EF mit RN und PQ parallel und folglich W. HDE $= NRQ = 90^0$. Da nun GEHF eine Kreislinie ist und GH die Axe des Kegels schneidet, also durch den Mittelpunkt dieser Kreislinie GEHF geht, so ist auch hier $y^2 = DE^2 = DG \,.\, DH$;
und eben so gelten auch für die gegenwärtige Betrachtung ganz dieselben Schlußfolgen, wie in §. 158, nur mit dem Unterschiede, daß hier die Linien EF und AL eben so wohl schiefe, als rechte Winkel einschließen können. Es gelten daher auch hier für die einzelnen in Betracht zu ziehenden Fälle dieselben Gleichungen wie dort, nur daß hier x und y nicht mehr ausschließlich rechtwinklige, sondern überhaupt parallele Coordinaten bezeichnen. Weil aber die Gleichungen der Parabel, Ellipse und Hyperbel, wenn sie das einemal auf ihre Axen, das anderemal auf einander zugeordnete Durchmesser bezogen werden, in beiden Fällen ganz die nämliche Gestalt erhalten, so ist hierdurch vermöge §. 158 die Richtigkeit der Behauptungen des Lehrsatzes dargethan.

1. Eben so können auch die Gleichungen des §. 159 auf den vorliegenden Fall übertragen werden, nur wird p in der Gleichung (1) nicht mehr ausschließlich den Hauptparameter, sondern überhaupt einen dem Durchmesser AR, Fig. 67, zugeordneten Parameter bezeichnen. Eben so werden in den Gleichungen (2) — (5) 2a und 2b einander zugeordnete Durchmesser vorstellen.

2. Von besonderm Interesse ist die Beantwortung der Frage, unter welchen Bedingungen der Durchschnitt einer Ebene mit einer schiefen Kegelfläche ein Kreis wird. Dies findet natürlich erstens dann statt, wenn die durchschneidende Ebene der Ebene der Directrix parallel ist; allein dieser Fall kann auch dann eintreten, wenn diese beiden Ebenen sich schneiden. Wir erhielten in §. 158 unter Nr. 2 für die Axen eines elliptischen Durchschnitts die Gleichung

$$2a = AL \text{ und } 2b = \sqrt{AB \,.\, KL},$$

welche zufolge §. 160 überhaupt für zwei conjugirte Durchmesser eines elliptischen Durchschnitts gelten. Soll nun dieser ein Kreis sein, so müssen alle Durchmesser einander gleich, also zunächst $AL = \sqrt{AB \,.\, KL}$ sein, und es muß sich folglich

$$AB : AL = AL : KL$$

verhalten; und da ferner W. BAL = ALK ist, so muß $\triangle$ ABL $\sim$ LAK, also

$$\text{W. } ALB = LKA = CNM$$

und daher auch

$$\text{W. } CAL = CMN$$

sein. — Zweitens müssen zwei einander conjugirte Durchmesser einen rechten Winkel

einschließen*), also EF senkrecht auf AL sei. Da nun überdies zufolge der in §. 160 angegebenen Construction PQ $\perp$ RN und EF $\parallel$ PQ, GH $\parallel$ MN, also auch EF $\perp$ GH ist, so muß die Linie EF senkrecht auf der Ebene MCN stehen; es müssen daher auch die sich in der Linie EF schneidenden Ebenen AELF und HEGF, also auch die der letztern parallele Ebene der Directrix auf der durch die Axe CO gehenden Ebene CMN senkrecht sein. Der Durchschnitt AELF einer Ebene mit einer schiefen Kegelfläche wird daher ein Kreis, wenn dieselbe auf der durch die Axe CO und zur Ebene der Directrix senkrecht gelegten Ebene CMN ebenfalls senkrecht ist und mit den Seitenlinien CM und CN, in welchen die Ebene CMN die Kegelfläche schneidet, die nämlichen Winkel bildet, wie die Ebene der Directrix. Man nennt diesen Schnitt den antiparallelen oder Wechselschnitt.

3. Die über die Durchschnitte des geraden Kegels mit einer Ebene in §. 158 aufgestellten Behauptungen lassen auch noch folgende sehr kurze Ableitung zu: Wir wollen zunächst annehmen, daß die Durchschnittsebene ab, Fig. 68, die Seitenlinien co und cp, in denen die zu ihr senkrechte Ebene die Kegelfläche schneidet, beide und zwar an der nämlichen Seite der Spitze schneidet, wo wir dann zu zeigen haben, daß der entstandene Durchschnitt eine Ellipse ist. Zu diesem Zwecke denken wir uns zu beiden Seiten der Durchschnittsebene zwei Kugeln construirt, von denen die eine diese Ebene in einem Punkte e und die Kegelfläche in einem Kreise mgn, die andere die Durchschnittsebene in einem Punkte f und die Kegelfläche in einem Kreise ohp berührt. Wenn wir nun einen beliebigen Punkt z des Durchschnitts mit f und e verbinden und durch denselben eine Seitenlinie cz ziehen, welche den obern Kreis in g, den untern in h schneidet, so ist ze = zg, weil beide Linien von dem nämlichen Punkte ausgehende Tangenten der Kugelfläche sind; aus gleichem Grunde ist zf = zh, folglich zf + ze = gh, d. h. die Summe der Radien vectoren ist constant und der Durchschnitt also eine Ellipse, welche die Punkte f und e zu Brennpunkten hat.

In ganz ähnlicher Art ist der Beweis für diejenigen Schnitte des geraden Kegels zu führen, welche Parabeln oder Hyperbeln liefern.

Neunter Abschnitt.

Von geometrischen Oertern.

§. 161. Lehrsatz.

Als den geometrischen Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher eine gegebene gerade Linie und einen gegebenen Kreis berührt, ergeben sich zwei Parabeln, welche beide den Mittelpunkt des gegebenen Kreises zum Brennpunkte haben, deren Richtlinien beide der gegebenen Geraden parallel laufen und von derselben um die Größe des Radius des gegebenen Kreises abstehen, aber an entgegengesetzten Seiten der gegebenen geraden Linie liegen.

*) Da nach §. 87 von allen conjugirten Durchmessern der Ellipse nur die Axen einen rechten Winkel einschließen, so ist eine Ellipse nothwendig ein Kreis, wenn zwei gleiche conjugirte Durchmesser auf einander senkrecht stehen.

Beweis. Wenn zunächst die gegebene Gerade AB, Fig. 69, den gegebenen und um den Mittelpunkt C beschriebenen Kreis in den Punkten D und F durchschneidet und wir ziehen CG senkrecht auf AB, verlängern diese Linie über G hinaus, bis GH gleich dem Radius des gegebenen Kreises ist und ziehen durch H eine Parallele KL zu AB, so läßt sich äußerst leicht zeigen, daß, wenn wir zwei Kreise beschreiben, welche beide AB zur Tangente haben, und von denen der eine den Kreisbogen DE'F von außen, der andere den Bogen DEF von innen berührt, die Mittelpunkte dieser Kreise M und m gleichen Abstand von dem Punkte C und der Linie KL haben, indem

$$CN + MN = OK + OM \quad \text{und} \quad cn - mn = ok - om$$

ist. Es liegen folglich die Punkte M und m auf einer Parabel, deren Brennpunkt C, deren Directrix KL und deren halber Parameter CH = r + a ist, wenn wir den Radius des gegebenen Kreises mit r und den Abstand seines Mittelpunktes von der gegebenen Geraden mit a bezeichnen. — Eben so liegen die Mittelpunkte der Kreise, welche AB zur Tangente haben und entweder den Bogen DEF von außen oder den Bogen DE'F von innen berühren, auf einer Parabel, welche C zum Brennpunkte, die mit AB parallele und von derselben um GH' = r abstehende Linie K'L' zur Directrix hat und deren halber Parameter folglich = r — a ist.

Liegt zweitens die gegebene Gerade ganz außerhalb des gegebenen Kreises, so läßt sich eben so leicht zeigen, daß die Mittelpunkte der Kreise, welche den gegebenen Kreis ausschließend berühren, auf der einen, und diejenigen, welche ihn einschließend berühren, auf der andern der beiden im Lehrsatz bezeichneten Parabeln liegen, und daß bei der ersteren Parabel der halbe Parameter = a + r, bei der letzteren = a — r ist.

Wenn endlich die gegebene Gerade den gegebenen Kreis berührt, so geht die Parabel, deren Parameter wir im ersten Falle mit r — a, im andern mit a — r bezeichnet haben, in eine gerade Linie über, welche durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht und auf der gegebenen Geraden senkrecht steht.*)

Die folgenden Oerter, welche eine wesentliche Vervollständigung der Oerter bilden, welche in der Planimetrie**) aufgeführt zu werden pflegen, führen wir nur kurz an.

Der geom. Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher eine gegebene gerade Linie berührt und durch einen außerhalb derselben liegenden Punkt geht, ist eine Parabel, welche diesen Punkt zum Brennpunkte und die gegebene Gerade zur Directrix hat. (§. 34.)

Der geom. Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher einen gegebenen Kreis berührt und durch einen innerhalb desselben liegenden Punkt geht, ist eine Ellipse, welche diesen Punkt und den Mittelpunkt des gegebenen Kreises zu Brennpunkten und den Radius dieses Kreises zur großen Axe hat. (§. 61.)

Der geom. Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher einen gegebenen Kreis (ausschließend oder einschließend) berührt und durch einen außerhalb desselben gegebenen Punkt geht, ist eine Hyperbel, welche diesen

*) Wir empfehlen dem Leser, sich die unter (2) und (3) besprochenen Fälle, so wie auch die in der Anmerkung erwähnten Aufgaben durch die Zeichnung von Figuren zu veranschaulichen.

**) Anfangsgründe der Planimetrie §. 160.

Punkt und den Mittelpunkt des gegebenen Kreises zu Brennpunkten und den Radius dieses Kreises zur ersten Axe hat. (§. 100.)

Der geom. Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher zwei gegebene Kreise, von denen der eine ganz innerhalb des andern liegt, den größern von innen, den kleinern von außen berührt, ist eine Ellipse, welche die Mittelpunkte der beiden Kreise zu Brennpunkten und die Summe ihrer Radien zur große Axe hat. (§. 61.)

Der geom. Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher zwei gegebene Kreise, von denen der eine ganz innerhalb des andern liegt, so berührt, daß er den kleinern Kreis einschließt und von dem größern umschlossen wird, ist eine Ellipse, welche die Mittelpunkte dieser Kreise zu Brennpunkten und die Differenz ihrer Radien zur großen Axe hat. (§. 61.)

Der geom. Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher zwei Kreise, von denen der eine theilweise oder ganz außerhalb des andern liegt, gleichartig (entweder beide einschließend oder beide ausschließend) berührt, ist eine Hyperbel, welche die Mittelpunkte dieser Kreise zu Brennpunkten und die Differenz ihrer Radien zur ersten Axe hat. (§. 100.)

Der geom. Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher zwei Kreise, von denen der eine theilweise oder ganz außerhalb des andern liegt, ungleichartig (den einen einschließend, den andern ausschließend) berührt, ist eine Hyperbel, welche die Mittelpunkte dieser Kreise zu Brennpunkten und die Summe ihrer Radien zur ersten Axe hat. (§. 100.)

§. 162. Aufgabe.

Den geometrischen Ort zu bestimmen, welchen die Spitze des Schattens eines lothrechten Stabes auf einer wagerechten Ebene beschreibt, wenn angenommen wird, daß während eines Tages der nördliche oder südliche Abstand der Sonne vom Aequator unverändert derselbe bleibt.

Aufl. Es sei AB, Fig. 70, eine lothrechte, BC eine wagerechte Linie, AX die Richtung der Weltaxe*) und AS eine durch A und den Mittelpunkt der Sonne gehende Linie, welche wir uns auch über A hinaus beliebig fortgesetzt denken. Dann beschreibt diese Linie während eines Tages im allgemeinen eine (doppelte) gerade Kegelfläche, deren Axe mit der Weltaxe zusammenfällt, und der Durchschnitt einer durch B gehenden wagerechten Ebene mit dieser Kegelfläche ist der gesuchte geometrische Ort der Spitze des Schattens, welchen der lothrechte Stab, dessen Länge AB vorstellt, auf die wagerechte Ebene wirft.

Der Winkel, welchen die Seitenlinie der Kegelfläche AS mit der Axe PP′ bildet, nähert sich um so mehr einem rechten, je weniger die Sonne vom Aequator entfernt ist; er wird ein rechter, die Kegelfläche geht in eine Ebene über, wenn am Anfange des Frühlings oder des Herbstes die Sonne im Aequator steht. Der Durchschnitt zweier Ebenen aber ist eine gerade Linie. Ueberall auf der Erde durchläuft also zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche die Spitze des Schattens eine gerade Linie,

*) z. B. die Schatten werfende Kante des Zeigers einer Sonnenuhr.

welche von Westen nach Osten geht, folglich auf der Mittagslinie senkrecht steht und dieselbe in einem Abstande von dem Fußpunkte des lothrechten Stabes durchschneidet, welcher der Länge des Schattens, den der Stab um Mittag wirft, gleich ist.

An allen anderen Tagen im Jahre beschreibt aber die Linie AS eine Kegelfläche und der Ort, welchen die Schattenspitze durchläuft, ist folglich ein Kegelschnitt. Ob aber dieser Kegelschnitt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, hängt nach §. 158 davon ab, ob die wagerechte Ebene die beiden Seitenlinien AS und AS′ (oder deren Verlängerungen), welche mit der Axe PP′ und dem Lothe AB in der nämlichen Ebene liegen, an derselben Seite der Spitze A oder an entgegengesetzten Seiten schneidet oder mit einer derselben parallel ist, und dieses hängt wieder von der Größe der Winkel ACB und S′AC ab. Betragen diese Winkel mehr, als einen flachen, so divergiren die Linien AS′ und BC, und der Kegelschnitt ist folglich eine Hyperbel; ist die Summe dieser Winkel gleich einem Flachen*), so ist BC ∥ AS′, und der Kegelschnitt ist eine Parabel; ist die Summe der in Rede stehenden Winkel kleiner, als ein flacher, so convergiren die Linien BC und AS′, und der Kegelschnitt ist eine Ellipse. Bezeichnen wir die Polhöhe**) des Beobachtungsortes, welche bekanntlich der geographischen Breite gleich ist, mit p und die Declination der Sonne, d. h. den nördlichen oder südlichen Abstand derselben vom Aequator mit $\pm$ d, so ist W. AXB = p und W. SAP = 90⁰ — d, folglich $S'AC = 180^0 - 2d$

und $ACB = SAX - AXB = 180^0 - SAP - p = 90^0 + d - p,$

also $S'AC + ACB = 270^0 - d - p.$

Soll die Summe der Winkel S′AC und ACB gleich oder kleiner, als 180⁰ werden, so muß $p + d \gtreqless 90^0$, also $p \gtreqless 90^0 - d$ sein. Die größte Declination, welche die Sonne überhaupt erreicht, ist der Schiefe der Ecliptik gleich, welche (ohngefähr) $23\frac{1}{2}^0$ beträgt. Es muß also p, d. h. die Breite des Beobachtungsortes, mindestens $60\frac{1}{2}^0$ oder mehr betragen, wenn die Spitze des Schattens eine Parabel oder eine Ellipse beschreiben soll, und dieser Fall kann folglich nur in der kalten Zone eintreten. In der heißen und gemäßigten Zone ist durch das ganze Jahr $p + d < 90^0$; es beschreibt daher die Schattenspitze hier niemals einen andern Kegelschnitt, als eine Hyperbel, welche jedoch zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche, wie schon oben angegeben, in eine gerade Linie übergeht. Die erste Axe der Hyperbel fällt mit der Mittagslinie zusammen und die Asymptoten derselben gehen durch die Punkte, in denen die Sonne beim Auf- und Untergange sich zeigt.***)

Größere Mannigfaltigkeit bietet dagegen die kalte Zone dar; die Schattenspitze durchläuft zufolge des Obigen auch hier eine Hyperbel, wenn $p + d < 90^0$, also $d < 90^0 - p$ ist, d. h. in dem Theile des Sommers, in welchem die Sonne vom Aequator weniger absteht, als der Beobachtungsort vom Pole, so lange also, als die Sonne noch täglich auf- und untergeht.

---

*) Man wird sich hierbei am bequemsten die Punkte A und B und die Richtung BC, also den lothrechten Stab und die wagerechte Ebene als fest, die Linien PP′, AS und AS′ um den Punkt A drehbar, also die Kegelfläche als beweglich vorstellen.

**) d. h. die Höhe, in welcher sich der Pol über dem Horizonte zeigt.

***) Der Winkel, welchen die Asymptoten mit der Axe bilden, ist folglich gleich dem Azimuthe der Sonne beim Auf- oder Untergange.

Ist $d = 90^0 - p$, d. h. an demjenigen Tage, an welchem der Mittelpunkt der Sonne nicht mehr untergeht, um Mitternacht aber an den Horizont streift, beschreibt die Schattenspitze eine Parabel; der geometrische Ort derselben ist endlich eine Ellipse, wenn $d > 90^0 - p$, also so lange, als die Sonne während des Tages beständig über dem Horizonte bleibt. Am Pole selbst beschreibt daher die Schattenspitze alle Tage Kreise, deren Radius um so größer ist, je kleiner d ist, um so weniger die Sonne sich also über den Horizont erhebt.

1. Wenn wir unter der Schattenspitze denjenigen Punkt verstehen, in welchem die durch den festen Punkt A und den Mittelpunkt der Sonne S gezogene Linie die wagerechte Ebene schneidet, so wird die eine Hälfte des Kegelschnittes, also wenn diese eine Hyperbel ist, der eine Ast, während des Tages, die andere Hälfte, der andere Ast, während der Nacht beschrieben. Ist z. B. DCE der am Tage, D'C'E' der während der Nacht erzeugte Hyperbelast für irgend einen Tag des Sommers, so ist für einen Wintertag, an welchem die Sonne (in S') eben so weit südlich, als an jenem (in S) nördlich vom Aequator absteht, D'C'E' der Ast, der am Tage, und DCE der Ast, welcher während der Nacht beschrieben wird, wenn wir uns die Figur in Betreff der Himmelsgegenden so gestellt denken, daß die Linie von B nach C und C' von Süden nach Norden geht.

2. Für Leser, welche mit der sphärischen Trigonometrie bekannt sind, fügen wir noch folgende Auflösung der vorstehenden Aufgabe hinzu: Es sei in Fig. 71 ABE eine verticale, DBE eine horizontale Ebene, AB die Länge des lothrechten Stabes, PAE die Richtung der Weltaxe, AD eine Linie, welche zu irgend einer Zeit über A verlängert durch den Mittelpunkt der Sonne geht. Dann ist der Winkel AEB gleich der Polhöhe $= p$, also W. $BAE = 90^0 - p$ und der Winkel SAP, welchen die Linie nach der Sonne mit der Weltaxe bildet, $= 90^0 - d$, wenn wir die nördliche Declination der Sonne mit $+ d$, die südliche mit $- d$ bezeichnen, folglich auch W. $DAE = 90^0 - d$. Nun ist in dem körperlichen Dreiecke ABDE

$$\cos DAE = \cos BAE \,.\, \cos BAD + \sin BAE \,.\, \sin BAD \,.\, \cos DBE,$$

oder wenn wir die vorher angegebenen Werthe einsetzen,

$$\sin d = \sin p \,.\, \cos BAD + \cos p \sin BAD \,.\, \cos DBE.$$

Nehmen wir den Punkt B als den Anfangspunkt der Coordinaten eines rechtwinkligen Axensystems in der horizontalen Ebene DBE und die über B fortgesetzte Verlängerung von BE als den positiven Schenkel der Abscissenaxe an, bezeichnen wir ferner die Abscisse BG der Spitze D des Schattens, welchen der lothrechte Stab $AB = a$ auf die wagerechte Ebene wirft, mit x, die Ordinate DG mit y, dann ist

$$\cos DBE = - \cos DBG = - \frac{BG}{BD} = \frac{-x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}},$$

$$\cos BAD = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{\sqrt{(AB^2 + BD^2)}} = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + x^2 + y^2)}}$$

und $$\sin BAD = \frac{BD}{AD} = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{\sqrt{(a^2 + x^2 + y^2)}}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die zuletzt aufgeführte Gleichung geht dieselbe über

in $$\sin d = \sin p \,.\, \frac{a}{\sqrt{(a^2 + x^2 + y^2)}} - \cos p \,.\, \frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2 + y^2)}}$$

oder $$\sin d \,.\, \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} = a \sin p - x \cos p.$$

Nehmen wir in dieser Gleichung $d = 0$ an, so erhalten wir

$$x = a \tang p,$$

also in Uebereinstimmung mit den Entwicklungen des Haupttextes die Gleichung einer zur Abscissenaxe (Mittagslinie) senkrechten Linie.

Ist d von Null verschieden, so geben wir der obigen Gleichung, indem wir dieselbe rational machen, die Form

$$y^2 \sin d^2 - x^2 (\cos p^2 - \sin d^2) + ax \sin 2p = a^2 (\sin p^2 - \sin d^2),$$

zufolge deren die Gleichung einer Hyperbel, Parabel oder Ellipse angehört, je nachdem $d <$ oder $=$ oder $> 90^0 - p$ ist, wie wir dies schon oben im Haupttexte gefunden haben.

Ist $p = d$, d. h. die Declination der Sonne gleich der Breite des Beobachtungsortes, was also nur in der heißen Zone eintreten kann, so wird für $x = 0$ auch $y = 0$, und die obige Gleichung gehört folglich einer Hyperbel an, von welcher ein Scheitel in den Anfangspunkt der Coordinaten zu liegen kommt; es fällt nämlich am Mittage des betreffenden Tages die Schattenspitze des Stabes mit dem Fußpunkte desselben zusammen, indem die Sonne dann im Zenith steht.

§. 163. Aufgabe.

Den geometrischen Ort eines Punktes zu bestimmen, dessen Abstände von zwei sich rechtwinklig schneidenden Linien zusammen einer gegebenen Linie a gleich sind.

Auflösung. Wenn wir die sich rechtwinklig schneidenden Linien als Coordinatenaxen und einen der vier von denselben gebildeten rechten Winkeln als die erste Region annehmen, so lautet die Gleichung

$$x + y = a,$$

welche einer geraden Linie angehört, welche beide Axen unter Winkeln von 45^0 und in Punkten schneidet, deren Abstände vom Anfangspunkte $= a$ sind.

Soll jedoch nicht bloß der in der ersten Region liegende Theil dieser Linie, sollen auch die in die zweite und vierte Region fallenden Verlängerungen der Aufgabe entsprechen, so haben wir die Maßzahlen derjenigen Abstände von den Axen, welche an die negative Seite derselben fallen, auch als negative Zahlen auszudrücken.

Da wir jede Region als die erste ansehen können, so existiren überhaupt vier ein Quadrat einschließende Linien, welche der Aufgabe Genüge leisten.

1. Wenn die gegebenen Linien sich nicht unter rechten, sondern unter schiefen Winkeln schneiden und wir bezeichnen den von denselben gebildeten spitzen oder stumpfen Winkel mit α und nehmen die sich schiefwinklig schneidenden Linien als Coordinatenaxe an, so erhalten wir die Gleichung

$$x \sin \alpha + y \sin \alpha = a, \text{ also } x + y = \frac{a}{\sin \alpha},$$

also ebenfalls die Gleichung einer geraden Linie (§. 22, b.).

2. Ist von den senkrechten Abständen nicht die Summe, sondern die Differenz $= d$ gegeben, so lautet die Gleichung der betreffenden Linie bei rechtwinkligen Axen

$$y - x = d,$$

bei schiefwinkligen

$$y - x = \frac{d}{\sin \alpha}.$$

Die obere Gleichung ist ein specieller Fall der unteren, welcher hervorgeht, wenn wir

$\alpha = 90^0$ setzen, wo wir denn das Wort „schiefwinklig" nicht buchstäblich, sondern in dem Sinne nehmen, daß unsere Betrachtung sich nicht auf den rechten Winkel beschränken, sondern alle Winkel umfassen soll.

3. Bei den folgenden Aufgaben werden wir jedoch fast durchgehends nur rechtwinklige Axen zu Grunde legen, aus der doppelten Rücksicht, weil einerseits diese Fixirung der Vorstellungen den weniger geübten Lesern mehr Anschaulichkeit gewährt und die Auffassung erleichtert, und weil andererseits die Uebertragung der für rechtwinklige Axen gewonnenen Ableitungen auf schiefwinklige Axen, wie in den beiden vorhergehenden Beispielen, dem geübtern Leser keine Schwierigkeiten darbieten kann, da wir sowohl für die gerade Linie, als auch für die drei krummlinigen Kegelschnitte ganz die nämlichen Gleichungen erhalten haben, wenn dieselben auf rechtwinklige und wenn sie auf schiefwinklige Axen bezogen werden.

§. 164. Aufgabe.

Eine Linie BC, Fig. 72, von vorgeschriebener Länge, wird zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels so fortbewegt, daß ihre Endpunkte B und C beständig in diese Schenkel oder deren Verlängerung fallen; es fragt sich, welchen Weg ein bestimmter Punkt P in dieser Linie während der angegebenen Bewegung durchläuft.

Auflösung. Wenn wir die beiden Stücke PC und PB, in welche die gegebene Linie durch den auf derselben gegebenen Punkt getheilt wird, mit a und b bezeichnen, ferner die Schenkel AX und AY als Coordinatenaxen annehmen und demgemäß AD = x, DP = y setzen, so können wir die sich aus der Figur sofort ergebende Proportion

$$AD : BD = CP : BP$$

umsetzen in

$$x : \sqrt{b^2 - y^2} = a : b,$$

woraus nach einer leicht auszuführenden Umformung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

hervorgeht, also eine Ellipse, deren halbe Axen gleich a und b sind.

§. 165. Aufgabe.

Den geometrischen Ort des Mittelpunktes P eines Kreises zu bestimmen, welcher durch einen gegebenen Punkt A geht und von einer der Lage nach gegebenen Linie BL eine Sehne DE von vorgeschriebener Länge (2a) abschneidet, Fig. 73.

Auflösung. Wenn wir den Punkt A als Anfangspunkt der Coordinaten und eine durch denselben zu BL parallel gezogene Linie AX als Abscissenaxe annehmen, ferner den Abstand AB des Punktes A von der Linie KL gleich b setzen und die Coordinaten des Mittelpunktes P (AH und PH) gleich x und y setzen, so erhalten wir leicht, da PA = PD ist, die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2 + (b + y)^2$$

oder nach einiger Reduction

$$x^2 = 2by + a^2 + b^2.$$

Diese Gleichung gehört einer Parabel an, deren Axe mit der Ordinatenaxe zusammenfällt, und deren Parameter = 2b ist. Setzen wir in derselben x = 0, so finden wir die Ordinate des Scheitels

$$y' = -\frac{a^2 + b^2}{2b}.$$

Wir erhalten diesen Punkt durch geometrische Construction, wenn wir BJ = BK = a machen und durch die drei Punkte KAJ einen Kreis legen; der Mittelpunkt C dieses Kreises ist der gesuchte Scheitel; denn wenn wir uns noch AJ gezogen denken, so ist $AJ^2 = a^2 + b^2$ und

$$AO = \frac{AJ^2}{AB} = \frac{a^2 + b^2}{b}, \text{ also } AC = \frac{a^2 + b^2}{2b} = -y',$$

der Brennpunkt F der Parabel aber wird gefunden, wenn wir von C aus $CF = \frac{1}{2}b$ auftragen.

§. 166. Aufgabe.

Den geometrischen Ort des Mittelpunktes P eines Kreises zu finden, welcher von zwei sich rechtwinklig schneidenden Axen AX und AY zwei Sehnen von vorgeschriebener Länge BC = 2c und DE = 2d abschneidet (Fig. 74).

Auflösung. Wenn wir AG = PH = x und AH = PG = y setzen, so erhalten wir leicht die Gleichung

$$y^2 + c^2 = x^2 + d^2$$

oder

$$y^2 - x^2 = -(c^2 - d^2),$$

welche einer gleichseitigen Hyperbel angehört, deren Mittelpunkt in den Anfangspunkt A und deren erste Axe mit der Abscissenaxe zusammenfällt, wenn wir $c > d$ annehmen. Die Abscisse x' des Scheitels aber ergibt sich durch die Gleichung

$$x' = \sqrt{c^2 - d^2}.$$

§. 167. Aufgabe.

Den geometrischen Ort der Spitze P eines Dreiecks zu finden, wenn die Grundlinie AB der Lage und Größe nach (= c) und das Verhältniß der Seiten AP : BP = m : n gegeben ist (Fig. 75).

Auflösung. Wenn wir die Grundlinie AB als Abscissenaxe, den einen Endpunkt derselben A als Anfangspunkt der Coordinaten annehmen, demgemäß AH = x und PH = y setzen, so ist

$$AP^2 = x^2 + y^2 \text{ und } BP^2 = (c - x)^2 + y^2.$$

Wir erhalten demnach die Proportion

$$x^2 + y^2 : (c - x)^2 + y^2 = m^2 : n^2$$

und hieraus nach einiger Umformung die Gleichung

$$(m^2 - n^2)\, y^2 + (m^2 - n^2)\, x^2 - 2cm^2x = -m^2c^2,$$

also die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt in der Abscissenaxe liegt. Um den Radius und die Abscisse des Mittelpunktes zu finden, bringen wir die obige Gleichung auf die folgende Form

$$y^2 + \left(x - \frac{m^2c}{m^2 - n^2}\right)^2 = \frac{m^2n^2c^2}{(m^2 - n^2)^2},$$

woraus sich nach §. 30 der Radius

$$r = \frac{mnc}{m^2 - n^2}$$

und die Abscisse des Mittelpunktes

$$\alpha = \frac{m^2 c}{m^2 - n^2}$$

ergibt. Wir construiren den betreffenden Kreis am einfachsten, indem wir die Abscissen x′ und x″ der Punkte suchen, in denen derselbe die Abscissenaxe durchschneidet. Setzen wir zu diesem Zwecke in der obigen Gleichung $y = 0$, so ergibt sich

$$x' = \frac{mc}{m + n} \text{ und } x'' = \frac{mc}{m - n}.$$

Wir erhalten folglich die gesuchten Einschnittspunkte, indem wir einmal die Linie AB nach dem Verhältniß $m : n$ theilen, das anderemal über B hinaus nach diesem Verhältnisse verlängern. Es sind daher diese Punkte und die Endpunkte der Grundlinie A und B harmonische Punkte*).

§. 168. Aufgabe.

Den geometrischen Ort des Mittelpunktes P des in ein gegebenes Dreieck ABC gezeichneten Rechteckes DEFG zu bestimmen (Fig. 76).

Aufl. Wenn wir $AK = x$, $PK = y$ annehmen, ferner die Höhe CH ziehen und $CH = h$, $AH = a$, $BH = b$ setzen, so ist $DG = EF = 2y$, $CL = h - 2y$, folglich

$$DH = \frac{a(h - 2y)}{h} \text{ und } EH = \frac{b(h - 2y)}{h}.$$

Demnach ist

$$DK = AK - AH + DH = x - a + \frac{a(h - 2y)}{h}$$

und

$$EK = EH - x + a = \frac{b(h - 2y)}{h} - x + a,$$

also da $DK = EK$ ist,

$$\frac{a(h - 2y)}{h} + x - a = \frac{b(h - 2y)}{h} - x + a$$

oder

$$(a - b)(h - 2y) = 2h(a - x).$$

Da diese Gleichung vom ersten Grade ist, so ist der gesuchte Ort eine gerade Linie OR. Setzen wir in der vorstehenden Gleichung $y = 0$, so ergibt sich $x = \frac{a + b}{2}$, und wenn wir $x = a$ setzen, so erhalten wir $y = \frac{1}{2}h$. Die Linie OR schneidet folglich sowohl die Grundlinie, als auch die Höhe in ihrem Halbirungspunkte.

Daß die Linie OR nicht bloß innerhalb des Dreiecks ABC liegt, sondern sich nach zwei Seiten ins Unendliche erstreckt, erklärt sich daraus, daß die Ecken des Rechtecks DEFG auch auf die über A und B fortgesetzten Verlängerungen der Linie AB und eben so auf die über A, B und C fortgesetzten Verlängerungen der Linien AC und BC fallen können.

---

*) S. Planimetrie §. 253.

Zur weiteren Uebung führen wir noch folgende Aufgaben an:

Aufg. 1—7. Den geometrischen Ort der Spitze P eines Dreiecks zu finden, wenn die Grundlinie sowohl der Lage, als der Größe nach (2g) und ferner gegeben ist:

1) Die Summe der Quadrate der Seiten $AP^2 + BP^2 = f^2$ (Fig. 75).

Aufl. Wir nehmen, so wie in den vorhergehenden Aufgaben die Grundlinie als Abscissenaxe, aber als Anfangspunkt der Coordinaten am bequemsten den Halbirungspunkt derselben an, weil dann, wie leicht aus der Aufgabe selbst von vornherein zu sehen ist, die Curve durch die Ordinatenaxe symmetrisch getheilt wird. Wir erhalten so, da $AD = BD = g$, $DH = x$ und $PH = y$ ist, die Gleichung

$$(g + x)^2 + y^2 + (g - x)^2 + y^2 = f^2$$

oder

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}f^2 - g^2. \text{ (S. §. 29*)).}$$

2) Der Unterschied der Quadrate der Seiten $AP^2 - BP^2 = d^2$.

Aufl. $4gx = f^2$. (S. §. 20.)

3) Summe der Seiten $AP + BP = 2f$.

Aufl. Aus der Aufgabe selbst ergibt sich uns zunächst die Gleichung

$$\sqrt{y^2 + (g + x)^2} + \sqrt{y^2 + (g - x)^2} = 2f.$$

Wenn wir, um die Gleichung rational zu machen, die zweite Wurzel transponiren und dann quadriren, so erhalten wir nach einiger Reduction

$$f\sqrt{y^2 + (g - x)^2} = f^2 - gx,$$

und wenn wir aufs neue quadriren

$$f^2y^2 + (f^2 - g^2)\,x^2 = f^2(f^2 - g^2) \text{ (S. §. 71).}$$

4) Die Differenz der Seiten $AP - BP = 2d$.

Aufl. Wir erhalten aus der Aufgabe zunächst die Gleichung

$$\sqrt{y^2 + (g + x)^2} - \sqrt{y^2 + (g - x)^2} = d,$$

und dann weiter, wenn wir dieselbe nach dem Verfahren, welches wir so eben angewendet haben, rational machen,

$$d^2y^2 - (g^2 - d^2)\,x^2 = - d^2(g^2 - d^2) \text{ (S. §. 110).}$$

5) Der Winkel an der Spitze $APB = \gamma$.

Aufl. Wir sind zunächst im Stande, in dem Dreiecke ABP die Winkel A und B trigonometrisch auszudrücken:

$$\text{tang } A = \frac{PH}{AH} = \frac{y}{g + x} \text{ und tang } B = \frac{PH}{BH} = \frac{y}{g - x}.$$

Zufolge der Trigonometrie**) ist

$$\text{tang } \gamma = - \text{tang } (A + B) = - \frac{\text{tang } A + \text{tang } B}{1 - \text{tang } A \,.\, \text{tang } B},$$

also

$$\text{tang } A + \text{tang } B = \text{tang } A \text{ tang } B \text{ tang } \gamma - \text{tang } \gamma.$$

Setzen wir in diese Gleichung für tang A und tang B die vorhin angegebenen Werthe ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{y}{g + x} + \frac{y}{g - x} = \frac{y^2 \text{ tang } \gamma}{g^2 - x^2} - \text{tang } \gamma,$$

woraus nach einiger Umformung

$$x^2 + y^2 - 2gy \text{ cotg } \gamma = g^2$$

*) S. auch Planimetrie §. 228.

**) Anfangsgründe der Trigonometrie §§. 13 und 31.

und dann weiter $$x^2 + (y - g \cot g\, \gamma)^2 = \frac{g^2}{\sin \gamma 2}$$

hervorgeht, also die Gleichung eines Kreises, dessen Radius $= \frac{g}{\sin \gamma}$ ist, und dessen Mittelpunkt in der Ordinatenaxe liegt und die Ordinate $g \cot g\, \gamma$ hat, was mit einem bekannten Satze der Planimetrie übereinstimmt.

*6) Der Unterschied der Winkel an der Grundlinie $B - A = \delta$.

Aufl. Indem wir in ganz ähnlicher Art wie bei der vorhergehenden Aufgabe verfahren, bekommen wir zuerst die Gleichung

$$\text{I.}\quad \operatorname{tang} \delta = \frac{\operatorname{tang} B - \operatorname{tang} A}{1 + \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B}$$

und dann weiter $$\text{II.}\quad \frac{y}{g - x} - \frac{y}{g + x} = \operatorname{tang} \delta + \frac{y^2 \operatorname{tang} \delta}{g^2 - x^2}$$

und nach einiger Reduction

$$\text{III.}\quad y^2 - x^2 - 2xy \cot g\, \delta = - g^2,$$

eine Gleichung, welche zufolge §. 142 einer Hyperbel angehört. Um diese auf zwei rechtwinklige Axen zurückzuführen, welche mit den Axen der Hyperbel zusammen fallen, bezeichnen wir den Winkel, welchen die erste Axe der Hyperbel mit der bisherigen Abscissenaxe bildet, mit α und die Coordinaten irgend eines Punktes auf der Hyperbel für die neue Abscissenaxe, als welche wir die erste Axe der Hyperbel annehmen, mit u und v; dann ist nach §. 16

$$x = u \cos \alpha - v \sin \alpha \text{ und } y = u \sin \alpha + v \cos \alpha.$$

Wenn wir diese Werthe in die obige Gleichung einsetzen, so verwandelt sich dieselbe in

$$(v^2 - u^2)(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cot g\, \delta) + 2uv(\cos 2\alpha \cot g\, \delta - \sin 2\alpha) = - g^2,$$

oder wenn wir die ganze Gleichung mit $\sin \delta$ multipliciren,

$$\text{IV.}\quad (v^2 - u^2) \sin(2\alpha + \delta) - 2uv \cos(2\alpha + \delta) = - g^2 \sin \delta.$$

Da nach unserer Annahme die Abscissenaxe mit der ersten, die Ordinatenaxe mit der zweiten Axe der Hyperbel zusammenfallen soll, so muß der Coefficient des dritten Gliedes

$$\text{V.}\quad \cos(2\alpha + \delta) = 0, \text{ also } 2\alpha + \delta = 90^0 \text{ und folglich } \alpha = 45^0 - \tfrac{1}{2}\delta$$

sein, wonach sich die zuletzt erhaltene Gleichung vereinfacht in

$$\text{VI.}\quad v^2 - u^2 = - g^2 \sin \delta.$$

Der gesuchte Ort ist also eine gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt in den Halbirungspunkt D der Grundlinie AB fällt, deren erste Axe von AB um den Winkel $45^0 - \frac{1}{2}\delta$ und deren Asymptoten folglich um $-\frac{1}{2}\delta$ und $90^0 - \frac{1}{2}\delta$ von dieser Linie abweichen. Ist $\delta = 90^0$, so ist $\alpha = 0$; die erste Axe der Hyperbel fällt folglich mit der Linie AB zusammen. Dem entsprechend fanden wir bereits oben in der Anm. zu §. 124, daß, wenn man auf einer gleichseitigen Hyperbel einen beliebigen Punkt E, Fig. 51, annimmt und denselben mit den Endpunkten A und B der ersten Axe verbindet, W. EAX + EBA $= 90^0$ und folglich auch EAB — EBA $= 90^0$ ist.

Wenn man $\delta = 0$ annehmen wollte, so würde die vorstehende Entwicklung unbrauchbar, indem dann in der Gleichung (III.) $\cot g\, \delta = \infty$ wird. Die Gleichung (II.) vereinfacht sich aber für $\delta = 0$ in

$$\frac{y}{g + x} - \frac{y}{g - x} = 0,$$

woraus sich $$x = 0$$

ergibt, und der gesuchte Ort ist eine in der Mitte der Grundlinie errichtete Senkrechte;

das Dreieck ABP ist nämlich, wenn $\delta = 0$, also $A = B$ angenommen wird, gleichschenklig, und die Spitzen aller über derselben Grundlinie errichteten gleichschenkligen Dreiecke liegen bekanntlich in einem in der Mitte der gemeinschaftlichen Grundlinie errichteten Lothe.

7) Das Verhältniß der Winkel an der Grundlinie $A : B = 1 : 2$, also $B = 2A$.

Aufl. Wir erhalten zunächst aus der Aufgabe die Gleichung

$$\text{tang } B = \text{tang } 2A = \frac{2 \text{ tang } A}{1 - \text{tang } A^2}$$

oder

$$\text{tang } B (1 - \text{tang}' A^2) = 2 \text{ tang } A,$$

und wenn wir die in der 5. Aufgabe angegebenen Werthe von tang α und tang β einsetzen

$$\frac{y}{g - x}\left(1 - \frac{y^2}{(g + x)^2}\right) = \frac{2y}{(g + x)'}$$

woraus nach einiger Umformung

$$y^2 - 3x^2 - 2gx = - g^2$$

oder

$$y^2 - 3(x + \tfrac{1}{3}g)^2 = - \tfrac{2}{3}g^2$$

hervorgeht. Um diese Gleichung mit der Gleichung der Hyperbel in §. 133 zusammen zu stellen, geben wir der letztern die folgende Form

$$(y - \beta)^2 - \frac{b^2}{a^2}(x - \alpha)^2 = - b^2.$$

Wir finden dann

$$\beta = 0, \ \alpha = - \tfrac{1}{3}g, \ b = \tfrac{1}{3}g\sqrt{6} \text{ und } a = \tfrac{1}{3}g\sqrt{2},$$

und wenn wir den Winkel, welchen die Asymptoten mit der ersten Axe bilden, mit ω bezeichnen,

$$\text{tang } \omega = \frac{b}{a} = \sqrt{3}, \text{ also } \omega = 60^0.$$

Aufg. 8. Den geometrischen Ort eines Punktes zu bestimmen, dessen Abstände von einer der Lage nach gegebenen Linie und von einem außerhalb derselben gegebenen Punkte sich wie m : n verhalten.

Aufl. Wenn wir den gegebenen Punkt als Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten, eine durch denselben zu der gegebenen senkrecht gezogene Linie als Abscissenaxe annehmen und den Abstand des gegebenen Punktes von der gegebenen Linie mit d bezeichnen, so ergibt sich aus der Aufgabe die Proportion

$$d + x : \sqrt{x^2 + y^2} = m : n$$

und hieraus leicht weiter

$$m^2y^2 + (m^2 - n^2) x^2 - 2n^2dx = n^2d^2.$$

Diese Gleichung gehört zufolge §. 34 und in Uebereinstimmung mit §. 97 und 136 einer Parabel, Ellipse oder Hyperbel an, je nachdem $m = n$, $m > n$ oder $m < n$ ist.

Aufg. 9—11. Den geometrischen Ort des Mittelpunktes des in ein Dreieck eingeschriebenen Kreises zu bestimmen, wenn von demselben die Grundlinie der Lage und Größe nach (2g) gegeben ist und ferner

9. der Winkel an der Spitze $= \gamma$.

Aufl. Das in der 5. Aufgabe angewendete Verfahren liefert die Gleichung

$$x^2 + y^2 + 2gy \text{ tang } \tfrac{1}{2}\gamma = g \text{ (S. §. 30).}$$

10. Der Unterschied der Seiten $BC - AC = d$ (Fig. 77).

Aufl. Nach bekannten Sätzen der Trigonometrie verhält sich in dem Dreiecke ABC

$$BC : AC : AB = \sin A : \sin B : \sin C,$$

folglich $BC - AC : AB = \sin A - \sin B : \sin C,$

also $$d : 2g = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} : \sin(A+B),$$

oder $$d : 2g = \sin \frac{A-B}{2} : \sin \frac{A+B}{2},$$

wofür wir auch
$$d : 2g = (\tang \tfrac{1}{2}A - \tang \tfrac{1}{2}B) : (\tang \tfrac{1}{2}A + \tang \tfrac{1}{2}B),$$
und dann weiter
$$2g + d : 2g - d = \tang \tfrac{1}{2}A : \tang \tfrac{1}{2}B$$
setzen können. Wenn wir nun den Halbirungspunkt D der Grundlinie AB als Anfangspunkt der Coordinaten und AD als positiven Schenkel der Abscissenaxe annehmen, so ist
$$\tang \tfrac{1}{2}A = \frac{y}{g-x} \text{ und } \tang \tfrac{1}{2}B = \frac{y}{g+x}.$$
Substituiren wir diese Werthe in die zuletzt erhaltene Proportion, so verwandelt sich dieselbe in
$$2g + d : 2g - d = g + x : g - x,$$
woraus
$$x = \tfrac{1}{2}d$$
hervorgeht. Wenn wir also von dem Halbirungspunkte D der Grundlinie AB aus $DG = \frac{1}{2}d$ auftragen und durch G eine gerade Linie senkrecht auf die Grundlinie ziehen, so ist diese der gesuchte Ort, wie auch leicht aus geometrischen Gründen erkannt wird *).

11. Die Summe der Seiten $AC + BC = f$ (Fig. 77).

Aufl. Durch ein dem eben angewendeten ganz ähnliches Verfahren erhalten wir die Gleichung
$$(f + 2g)y^2 + (f - 2g)x^2 = (f - 2g)g^2.$$
Geben wir dieser Gleichung, welche einer Ellipse angehört, deren Mittelpunkt in dem Anfangspunkt der Coordinaten liegt, und deren Axen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen, und der Gleichung der Ellipse in §. 71 die folgenden Formen
$$\frac{(f+2g)y^2}{(f-2g)g^2} + \frac{x^2}{g^2} = 1$$
und
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$
so ergibt sich
$$a = g \text{ und } b = g\sqrt{\frac{f-2g}{f+2g}},$$
wonach die Scheitel der Ellipse in die Endpunkte der Grundlinie fallen.

Man wird hierbei nicht unbeachtet lassen, daß das Dreieck ABC eben so wohl über der Grundlinie AB, als unter derselben liegen kann.

Aufg. 12. Den geometrischen Ort des Durchschnittspunktes der drei Höhen eines Dreiecks zu bestimmen, wenn eine Seite der Lage und Größe nach ($= 2g$) und der gegenüber liegende Winkel ($= \gamma$) gegeben sind.

Aufl. In ähnlicher Art wie in der 5. Aufgabe ergibt sich die Gleichung
$$x^2 + y^2 + 2gy \cot \gamma = g^2 \text{ (S. §. 30).}$$

---

*) Planimetrie §. 130.

Aufg. 13. Den geometrischen Ort des Schwerpunktes (Durchschnittspunktes der drei Mittellinien) P eines Dreiecks ABC, Fig. 77, zu bestimmen, wenn die Grundlinie der Lage und Größe nach $AB = 2g$ und die Summe der Seiten $AC + BC = f$ gegeben sind.

Aufl. Wir erhalten zunächst die Gleichung

$$x^2 + y^2 = PD^2 = \tfrac{1}{9}CD^2 \text{*)}.$$

Bekanntlich ist aber $2CD^2 = AC^2 + BC^2 - 2g^2$ **),

wonach sich die vorhergehende Gleichung verwandelt in

$$18x^2 + 18y^2 + 2g^2 = AC^2 + BC^2.$$

Ziehen wir noch die Höhe CH, so ist

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \text{ und } BC^2 = BH^2 + CH^2,$$

folglich $(AC + BC) . (BC - AC) = (AH + BH) . (BH - AH)$

oder $f . (BC - AC) = 12gx,$

indem $BH - AH = 2DH$ und $DH = 3DE = 3x$ ist.

Demnach erhalten wir

$$BC - AC = \frac{12gx}{f}$$

und da

$$AC + BC = f$$

vorausgesetzt ist, so ergibt sich

$$BC = \frac{f + 12gx}{2f} \text{ und } AC = \frac{f^2 - 12gx}{2f}.$$

Setzen wir diese Werthe in die oben für den geometrischen Ort des Punktes P erhaltene Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$72g^2x^2 + 72g^2y^2 + 8f^2g^2 = (f^2 + 12gx)^2 + (f^2 - 12gx)^2,$$

woraus nach einiger Reduction

$$f^2y^2 + (f^2 - 4g^2)\,x^2 = \frac{f^2\,(f^2 - 4g^2)}{36}$$

hervorgeht. Dividiren wir diese Gleichung durch 36 und stellen sie dann mit der Gleichung der Ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

zusammen, so ergibt sich

$$a = \tfrac{1}{6}f \text{ und } b = \tfrac{1}{6}\sqrt{f^2 - 4g^2}.$$

Aufg. 14. Zwei gleich lange Stäbe AC und BC, Fig. 78, sind mit einem Paar Endpunkten bei C durch ein Charnier verbunden, der zweite Endpunkt A des Stabes AC ist ebenfalls mit einem Charnier versehen, um welches dieser Stab gedreht werden kann; der Endpunkt B des andern Stabes ist längs der Linie XX′ beweglich; gesucht ist der geometrische Ort, welchen ein auf dem Stabe BC befindlicher Punkt P während dieser Bewegung durchläuft.

Aufl. Wenn wir $AC = BC = a$ und $BP = b$, ferner $AD = x$ und $PD = y$ setzen, wenn wir überdies noch in dem gleichschenkligen Dreiecke ABC die Höhe CH ziehen, so ist

$$y^2 + BD^2 = b^2$$

und

$$BD : BH = BP : BC$$

*) Planimetrie §. 265.
**) A. a. O. §. 228.

oder
$$BD : \frac{x + BD}{2} = b : a,$$
also
$$BD = \frac{bx}{2a - b}.$$
Setzen wir diesen Werth in die zuerst aufgeführte Gleichung ein, so erhalten wir
$$(2a - b)^2 y^2 + b^2 x^2 = (2a - b)^2 . b^2 \text{ (S. §. 71).}$$

*Aufg. 15. Den geometrischen Ort der Spitze eines Dreiecks BCP, Fig. 79, zu bestimmen, wenn dasselbe in der Art bewegt wird, daß die Endpunkte der Grundlinie BC beständig auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien, der eine BX auf A, der andere C auf AY bleibt.

Aufl. Wenn wir in dem Dreiecke BCP die Höhe EP ziehen, $BE = p$, $CE = q$, $PE = h$, ferner $AD = x$, $PD = y$ und Winkel $ABC = DPE = \varphi$ setzen, so gelangen wir leicht zu den folgenden Gleichungen
$$x = q \cos \varphi + h \sin \varphi$$
und
$$y = p \sin \varphi + h \cos \varphi.$$
Aus denselben ergibt sich
$$\sin \varphi = \frac{hx - qy}{h^2 - pq} \text{ und } \cos \varphi = \frac{hy - px}{h^2 - pq}.$$
Da $\sin \varphi^2 + \cos \varphi^2 = 1$ ist, so erhalten wir weiter
$$(hx - qy)^2 + (hy - px)^2 = (h^2 - pq)^2$$
oder
$$\text{I. } (h^2 + p^2) x^2 + (h^2 + q^2) y^2 - 2h (p + q) xy = (h^2 - pq)^2.$$
Stellen wir diese Gleichung mit der Gleichung des §. 142 zusammen, so erhalten wir
$$A = h^2 + p^2,\ B = h^2 + q^2 \text{ und } C = 2h (p + q),$$
folglich
$$4AB - C^2 = 4(h^2 - pq)^2.$$
Die Gleichung (I.) gehört also einer Ellipse an mit der einzigen Ausnahme, wenn
$$p : h = h : q,$$
also W. CPB ein rechter ist, in welchem Falle die Gleichung (I.) sich, wenn wir h eliminiren, vereinfacht in
$$(p + q) \cdot (x\sqrt{p} - y\sqrt{q})^2 = 0,$$
woraus
$$y = x\sqrt{\frac{p}{q}}$$
hervorgeht, eine Gleichung, welche einer geraden Linie angehört, die durch den Anfangspunkt A geht und mit der Abscissenaxe AX einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente $= \sqrt{p : q}$ ist. In jedem anderen Falle wird, wie schon angeführt, durch die Gleichung (I.) eine Ellipse repräsentirt. Bezeichnen wir in dem Dreiecke BCP die Grundlinie BC mit $2g$ und den Unterschied der Segmente $BE - CE$ mit $2d$, so ist
$$p + q = 2g \text{ und } p - q = 2d, \text{ also } p = g + d \text{ und } q = p - d.$$
Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (I.) ein, so formt sich dieselbe um in
$$(h^2 + g^2 + d^2)(x^2 + y^2) + 2gd (x^2 - y^2) - 4ghxy = (h^2 - g^2 + d^2)^2.$$
Wenn wir nun nach derselben Rücksicht, welche wir in der 6. Aufgabe angewendet haben,
$$x = u \cos \alpha - v \sin \alpha \text{ und } y = u \sin \alpha + v \cos \alpha$$
setzen, so ist
$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2,\ x^2 - y^2 = (u^2 - v^2) \cos 2\alpha - 2uv \sin 2\alpha$$
und
$$2xy = u^2 \sin 2\alpha - v^2 \sin 2\alpha + 2uv \cos 2\alpha.$$

Setzen wir diese Werthe in die zuletzt erhaltene Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$\text{II.}\quad \left.\begin{array}{l}(h^2+g^2+d^2)(u^2+v^2)\\ \quad -2g(h\sin 2\alpha - d\cos 2\alpha)(u^2-v^2)\\ \quad -4g(h\cos 2\alpha + d\sin 2\alpha)\,uv\end{array}\right\} = (h^2-g^2+d^2)^2.$$

Soll in dieser Gleichung das Glied mit dem Factor uv verschwinden, so muß

$$\text{III.}\quad h\cos 2\alpha + d\sin 2\alpha = 0$$

sein. Ist im besonderen Falle $h = 0$, liegt also der Punkt P auf der Linie BC, so folgt aus der Gleichung (III.) $\alpha = 0$; die Axen der Ellipse fallen also mit den Coordinatenaxen AX und AY zusammen, und die Gleichung (II.) vereinfacht sich in

$$(g+d)^2 u^2 + (g-d)^2 v^2 = (g+d)^2 \cdot (g-d)^2,$$

eine Ellipse, welche wir bereits besonders in der Aufgabe des §. 164 behandelt haben.

Ganz allgemein erhalten wir aus der Gleichung (III.)

$$\text{IV.}\quad \tan 2\alpha = -\frac{h}{d}.$$

Diese Gleichung liefert uns für den Winkel 2α zwei sich um 180^0 unterscheidende Werthe und also für den Winkel α zwei Werthe, welche sich um 90^0 unterscheiden. Da diese Werthe jedoch keine wesentliche Verschiedenheit herbeiführen, indem sich, ohne den Charakter der Betrachtung zu verändern, Abscissen- und Ordinatenaxe mit einander vertauschen lassen, so wollen wir nur denjenigen Werth von 2α berücksichtigen, welcher $< 180^0$ ist. Zufolge der Gleichung (IV.) ist dann

$$\sin 2\alpha = \frac{h}{\sqrt{(h^2+d^2)}} \text{ und } \cos 2\alpha = -\frac{d}{\sqrt{(h^2+d^2)}},$$

oder wenn wir in dem Dreiecke BCP die Grundlinie BC in G halbiren und die Mittellinie $GP = t$ setzen,

$$\sin 2\alpha = \frac{h}{t} \text{ und } \cos 2\alpha = -\frac{d}{t}.$$

Substituiren wir diese Werthe in die Gleichung (II.), so vereinfacht sich dieselbe in

$$(g+t)^2 v^2 + (g-t)^2 u^2 = (g+t)^2 (g-t)^2.$$

Wir erhalten also als den gesuchten geometrischen Ort eine *Ellipse, deren große Axe der Summe aus der Grundlinie und der doppelten Mittellinie des gegebenen Dreiecks und deren kleine Axe dem Unterschiede dieser beiden Linien gleich ist.* In Fig. 79 ist

$$\tan PGB = -\frac{h}{d}.$$

Vermöge der Gleichung (IV.) ist folglich *der Winkel* α, *um welchen die erste Axe der Ellipse von der Abscissenaxe abweicht, halb so groß, als der stumpfe Winkel, welchen die Mittellinie GP mit der Grundlinie BC bildet*, wenn wir nämlich annehmen, daß der Winkel B, dessen Scheitel in die Abscissenaxe fällt, kleiner ist, als der Winkel C, dessen Scheitel in der Ordinatenaxe liegt. Ist $d = 0$, also Dreieck BCP gleichschenklig, so ist vermöge der Gleichung (IV.) $2\alpha = 90^0$, also $\alpha = 45^0$, und die Axen der Ellipse bilden folglich mit den Coordinatenaxen Winkel von 45^0.

*Aufg. 16. *Den geometrischen Ort eines Punktes zu bestimmen, an welchem die von ihm aus an eine gegebene Ellipse gezogenen Tangenten einen rechten Winkel einschließen.*

Aufl. Wenn wir mit x, y die Coordinaten des gesuchten Punktes, ferner mit x_1, y_1 und mit x_2, y_2 die Coordinaten der Punkte bezeichnen, in welchen die von

demselben aus gezogenen Tangenten die Ellipse berühren, so können wir zufolge §. 77 die Gleichungen aufstellen

$$\text{I.} \quad \begin{cases} a^2y_1y + b^2x_1x = a^2b^2 \\ a^2y_2y + b^2x_2x = a^2b^2. \end{cases}$$

Bezeichnen wir ferner mit φ_1 und φ_2 die Winkel, welche die in den Punkten x_1, y_1 und x_2, y_2 die Ellipse berührenden Tangenten mit der Abscissenaxe bilden, so ist nach §. 75

$$\text{tang}\,\varphi_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \text{ und tang}\,\varphi_2 = -\frac{b^2x_2}{a^2y_2}.$$

Da zufolge unserer Annahme $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm 90^0$ sein soll, so erhalten wir

$$\text{tang}\,\varphi_1 = -\text{cotg}\,\varphi_2,$$

und indem wir die eben angegebenen Werthe einsetzen,

$$\text{II.} \quad b^4x_1x_2 = -a^4y_1y_2.$$

Zwischen den Größen x_1, x_2, y_1, y_2 haben wir aber, da die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf der Ellipse liegen, die Gleichungen

$$\text{III.} \quad \begin{cases} a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2 \\ a^2y_2^2 + b^2x_2^2 = a^2b^2. \end{cases}$$

Eliminiren wir y_1 zwischen den beiden obern Gleichungen in Nr. I. und III., so erhalten wir nach einiger Reduction die Gleichung

$$\text{IV.} \quad (a^2y^2 + b^2x^2)\,x_1^2 - 2a^2b^2xx_1 + a^4(b^2 - y^2) = 0.$$

Wenn wir diese Gleichung in Beziehung auf die Abscisse x_1 auflösen, so ergeben sich uns für dieselbe zwei Werthe, von denen der eine dem einen, der andere dem andern Berührungspunkte entspricht. Wir haben oben die Abscisse des einen Berührungspunktes mit x_1, die des andern mit x_2 bezeichnet, so daß also die beiden Auflösungen der quadratischen Gleichung (III.) gleich den gesuchten Abscissen x_1 und x_2 sind. Nach einem bekannten Satze der Algebra*) ist folglich

$$x_1x_2 = \frac{a^4(b^2 - y^2)}{a^2y^2 + b^2x^2}.$$

Die Gleichungen (I.) und (III.) bleiben richtig, wenn wir in denselben a mit b, x mit y, x_1 mit y_1 und x_2 mit y_2 vertauschen; eine der eben ausgeführten ganz ähnliche Entwicklung würde uns daher

$$y_1y_2 = \frac{b^4(a^2 - x^2)}{a^2y^2 + b^2x^2}$$

ergeben. Setzen wir nun die für die Producte x_1x_2 und y_1y_2 erhaltenen Werthe in die Gleichung (II.), so bekommen wir für den gesuchten geometrischen Ort die Gleichung

$$y^2 + x^2 = a^2 + b^2.$$

Der gesuchte Ort ist also ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte der Ellipse zusammenfällt, und dessen Durchmesser der Diagonale des um die Ellipse zu beschreibenden Rechtecks gleich ist.

*Aufg. 17. Die nämliche Aufgabe wie vorher für die Hyperbel.

Die Auflösung liefert ebenfalls die Gleichung eines Kreises, nämlich

$$y^2 + x^2 = a^2 - b^2 = a^2\,(1 - \text{tang}\,\omega^2),$$

wo ω den (spitzen) Winkel bezeichnet, welchen die Asymptoten mit der Abscissenaxe bilden, also die Hälfte des Winkels, innerhalb dessen ein Hyperbelast liegt. Je kleiner dieser Winkel ist, desto größer ist zufolge der vorstehenden Gleichung der Radius des durch diese Gleichung gegebenen Kreises; derselbe erhält seinen größten Werth, er

*) Arithmetik und Algebra §. 192.

wird gleich der halben ersten Axe a, wenn der Winkel 2ω verschwindet; der Radius verschwindet dagegen, der Kreis zieht sich in einem Punkt zusammen, wenn der Winkel 2ω ein rechter, also die Hyperbel gleichseitig ist, und er wird imaginär, wenn der Winkel 2ω ein stumpfer ist. Ist also bei einer Hyperbel $b > a$, so existirt kein Punkt, an welchem zwei aus demselben an die Hyperbel gezogene Tangenten einen rechten Winkel einschlössen.

*Aufg. 18. Die nämliche Aufgabe wie Nr. 16. und 17. für die Parabel.

Aufl. Wenn wir bei der Auflösung einen ganz ähnlichen Gang wie in Nr. 16 befolgen und die nämlichen Bezeichnungen wie dort anwenden, dann ergeben sich uns aus den §§. 45, 50 und 51 die Gleichungen

$$\text{I.}\quad yy_1 = p(x + x_1) \text{ und } yy_2 = p(x + x_2),$$

ferner
$$\tang \varphi_1 = \frac{p}{y_1} \text{ und } \tang \varphi_2 = \frac{p}{y_2},$$

daher
$$\text{II.}\quad y_1 y_2 = -p^2,$$

und endlich
$$\text{III.}\quad y_1^2 = 2px_1 \text{ und } y_2^2 = 2px_2.$$

Eliminiren wir zwischen den zuerst in Nr. (I.) und (III.) aufgeführten Gleichungen x_1, so erhalten wir

$$\text{IV.}\quad y_1^2 - 2yy_1 + 2px = 0.$$

Von den beiden Auflösungen, welche diese Gleichung für y_1 liefert, gibt die eine den Werth der Ordinate für den einen, die andere den Werth der Ordinate für den andern Berührungspunkt an. Wir haben diese Ordinaten mit y_1 und y_2 bezeichnet; y_1 und y_2 sind also die Auflösungen der Gleichung IV.

Nach einem bekannten Satze der Algebra ist folglich

$$y_1 y_2 = 2px.$$

Verbinden wir hiermit die Gleichung II., so ergibt sich

$$x = -\tfrac{1}{2}p.$$

Der gesuchte Ort ist folglich die Directrix (§. 36).

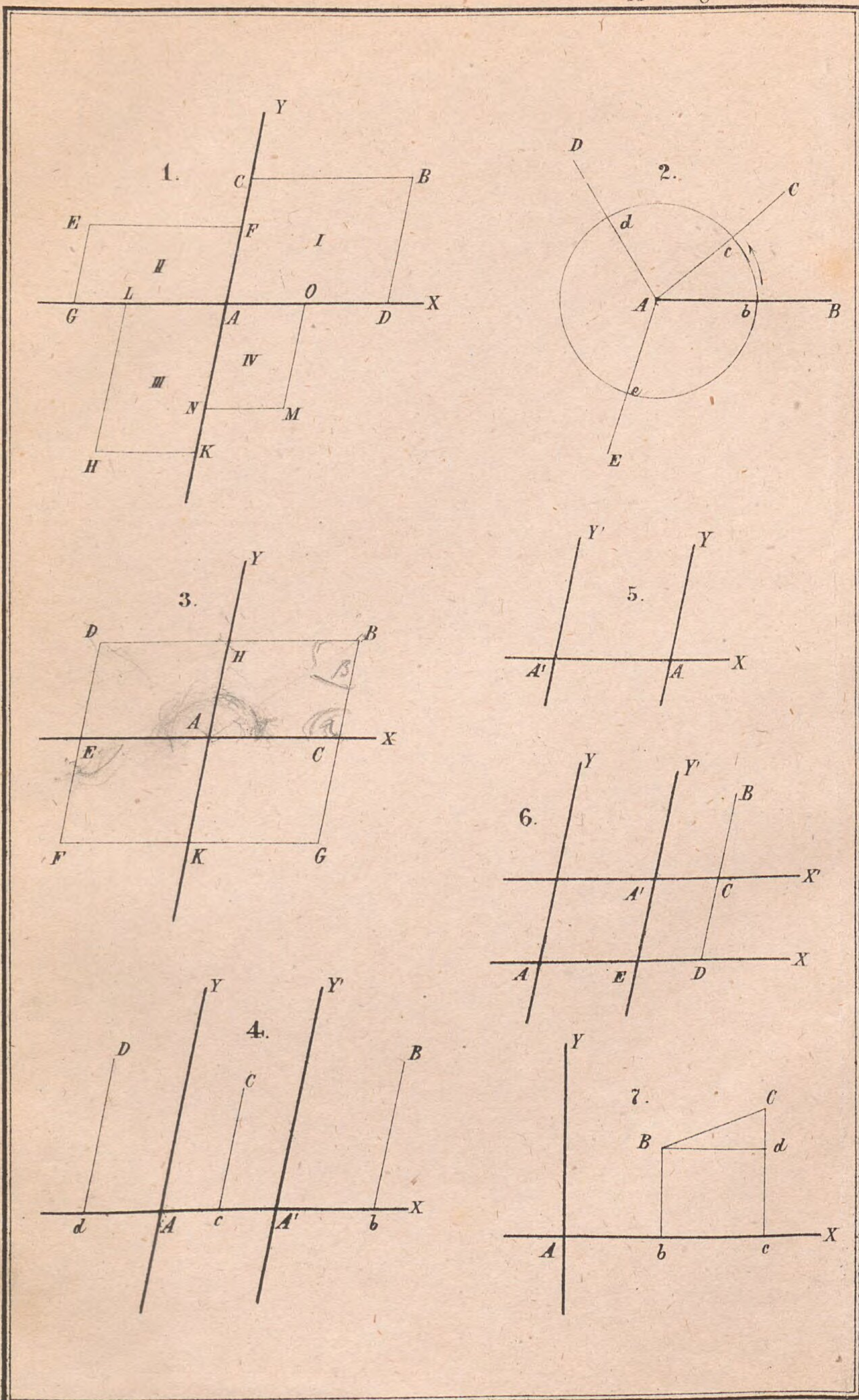
Wenn man also aus einem beliebigen Punkte der Directrix zwei Tangenten an die Parabel zieht, so schließen diese einen rechten Winkel ein. Dieser Satz läßt sich auch auf synthetischem Wege in folgender Art ableiten. In Fig. 22 ist zufolge §. 39 und 42

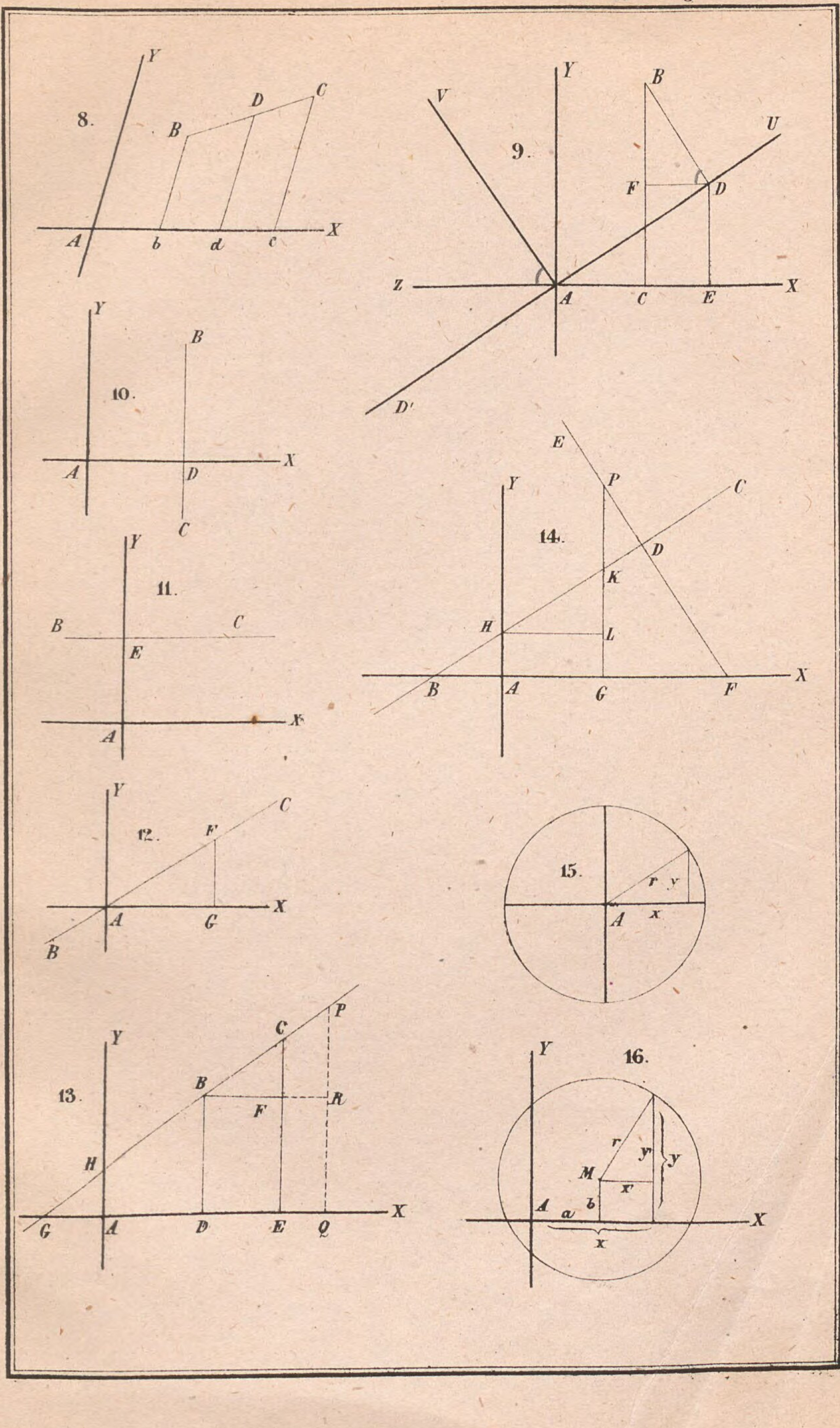
$$\text{W. } BFX = 2BCO$$

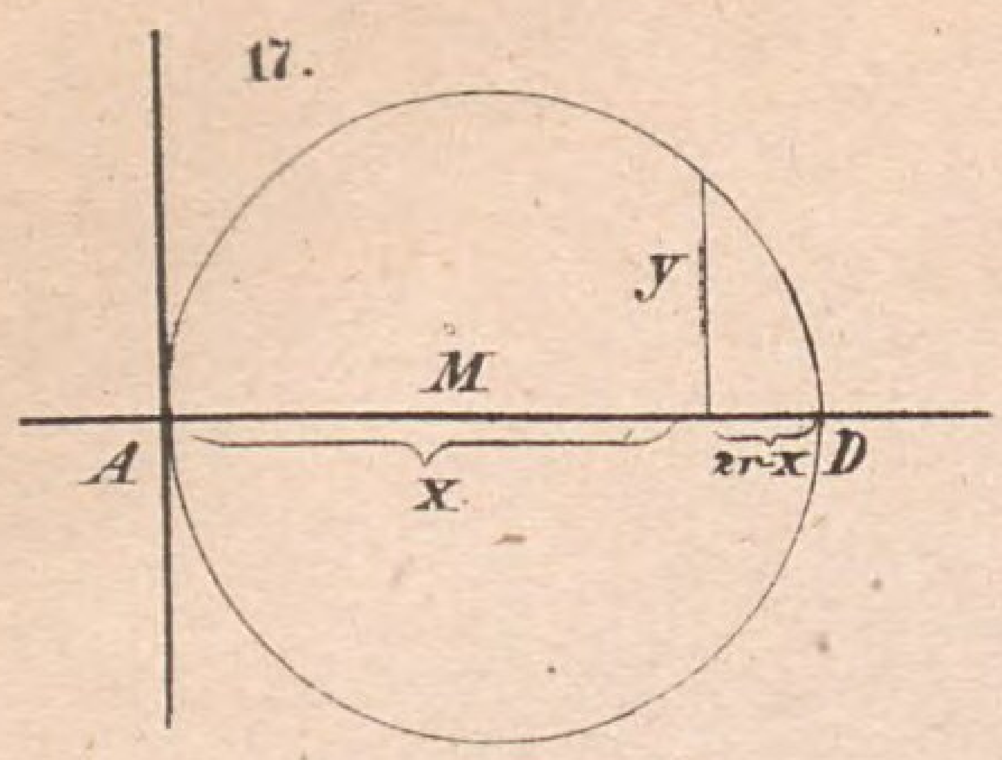
und
$$\text{W. } B'FX = 2B'QF = 2B'CO,$$

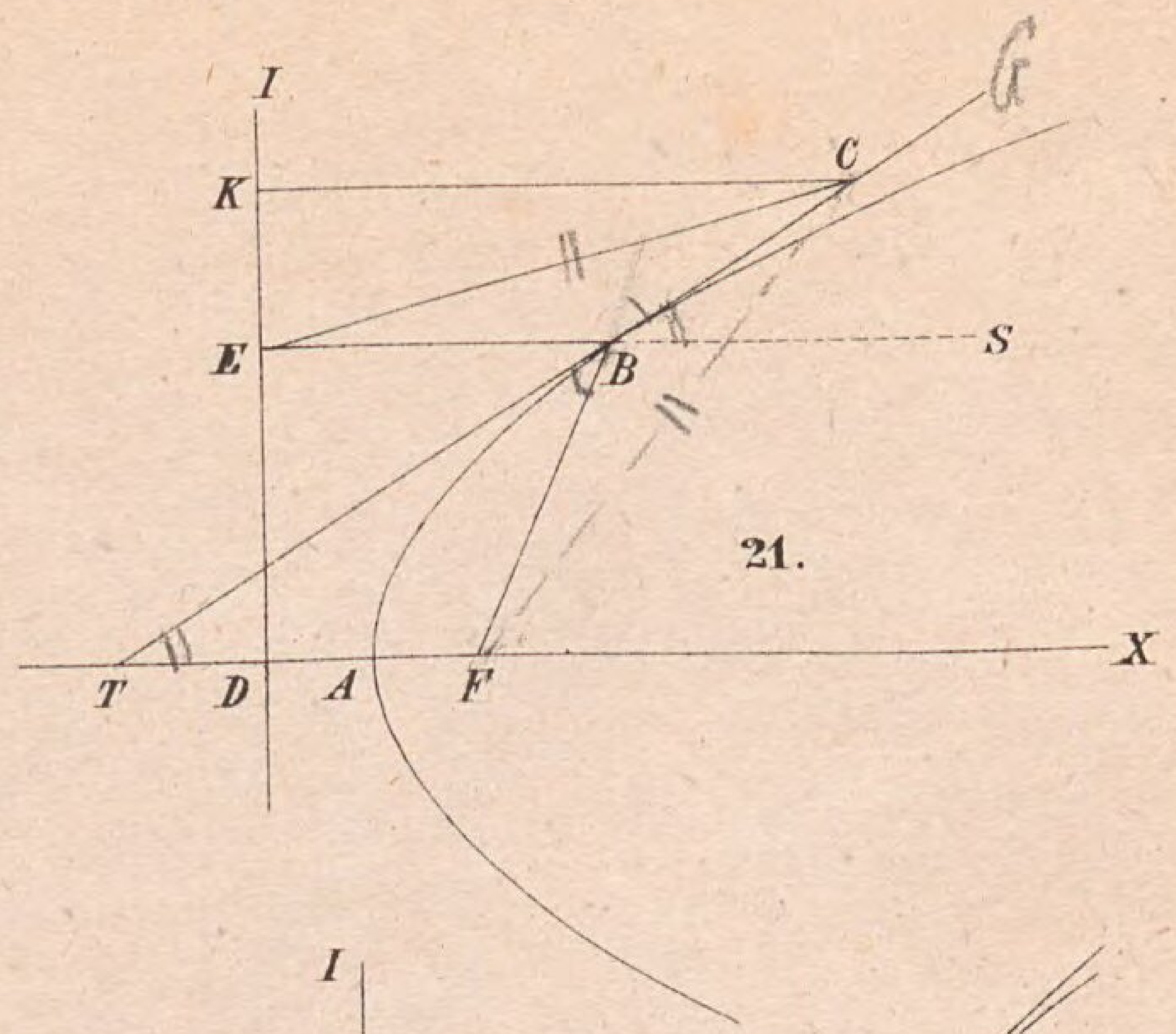
folglich der (erhabene) Winkel $BFB' = 2BCB'$, d. h. der (spitze oder stumpfe) Winkel, welchen zwei von einem Punkte ausgehende Tangenten einschließen ist halb so groß, als der (hohle oder erhabene) Winkel, welchen die nach den Berührungspunkten gezogenen Brennstrahlen (an der von den Tangenten abgewendeten Seite) einschließen. Wenn daher zwei Tangenten an ihrem Durchschnittspunkte einen rechten Winkel einschließen, so bilden die nach den Berührungspunkten gehenden Brennstrahlen zusammen eine durch den Brennpunkt gehende Sehne, und da nach §. 149 die Directrix die Polare des Brennpunktes ist, so muß vermöge §. 155 der Durchschnittspunkt der Tangenten auf die Directrix fallen.

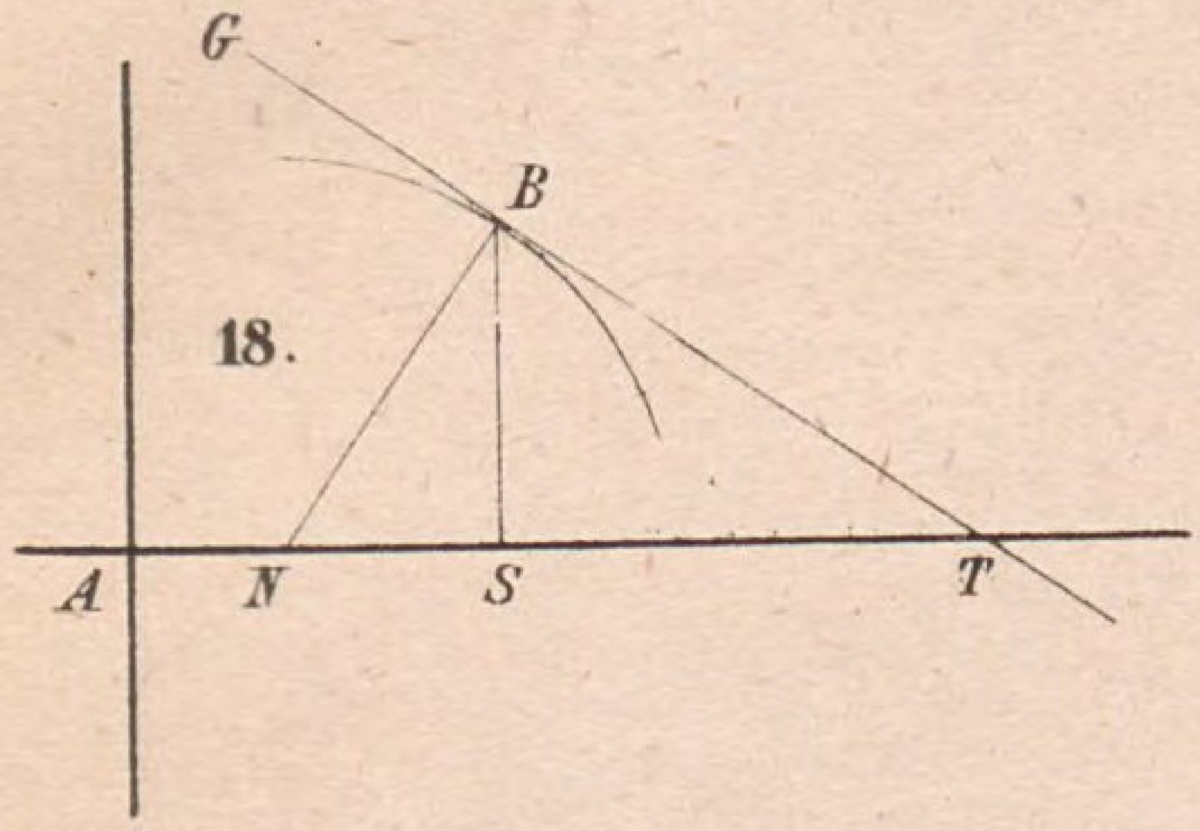
Druck von G. D. Bädeker in Essen.

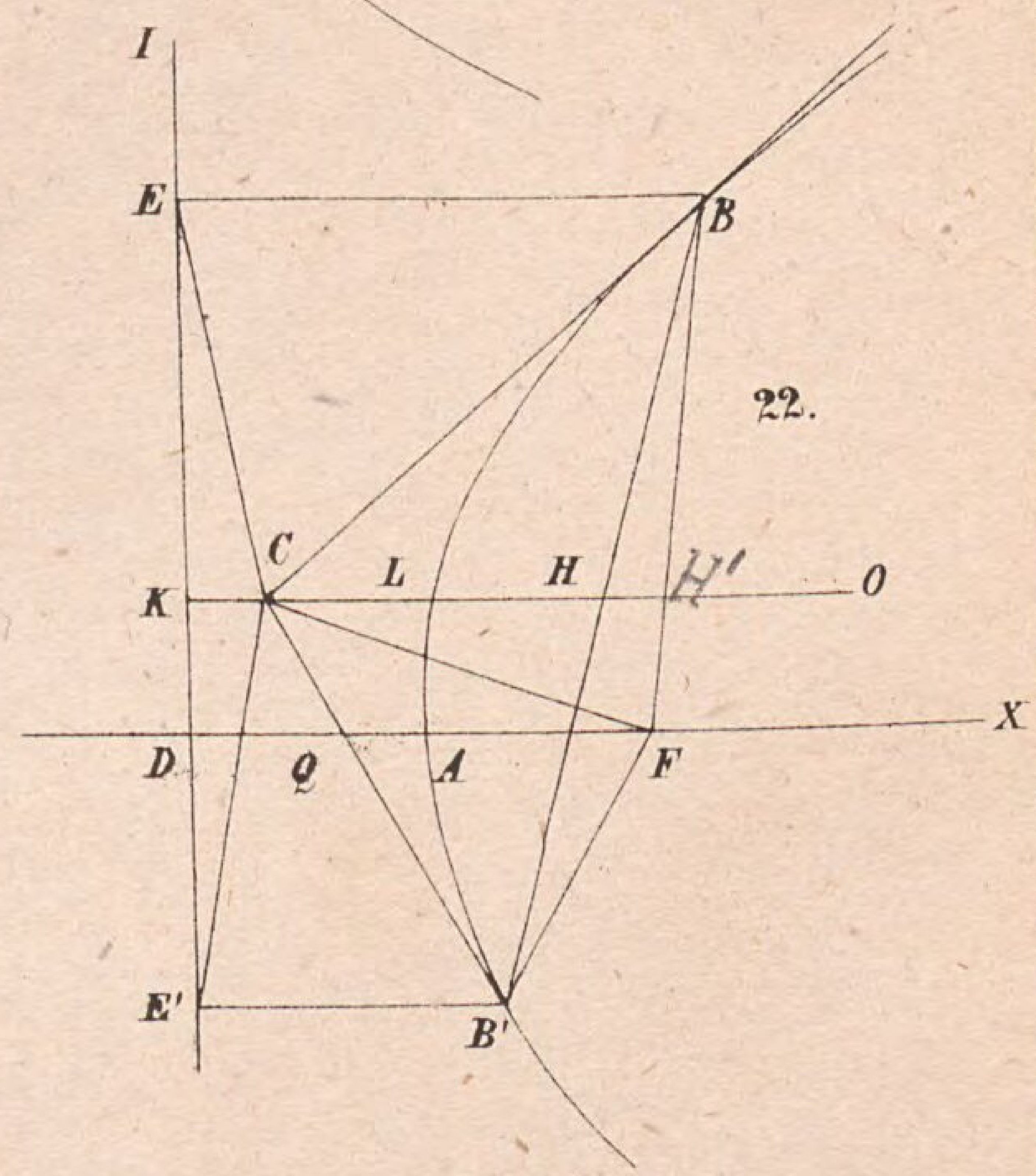

1.
Y
C B
E F I
II
L O X
G A D
IV
III
N M
K
H
2.
D
C
d
c
A b B
e
E
3.
Y
D B
H
A X
E C
F K G
4.
Y Y'
D B
C
d A c A' b X
5.
Y' Y
A' A X
6.
Y Y' B
A' C X'
A E D X
7.
Y
C
B d
A b c X

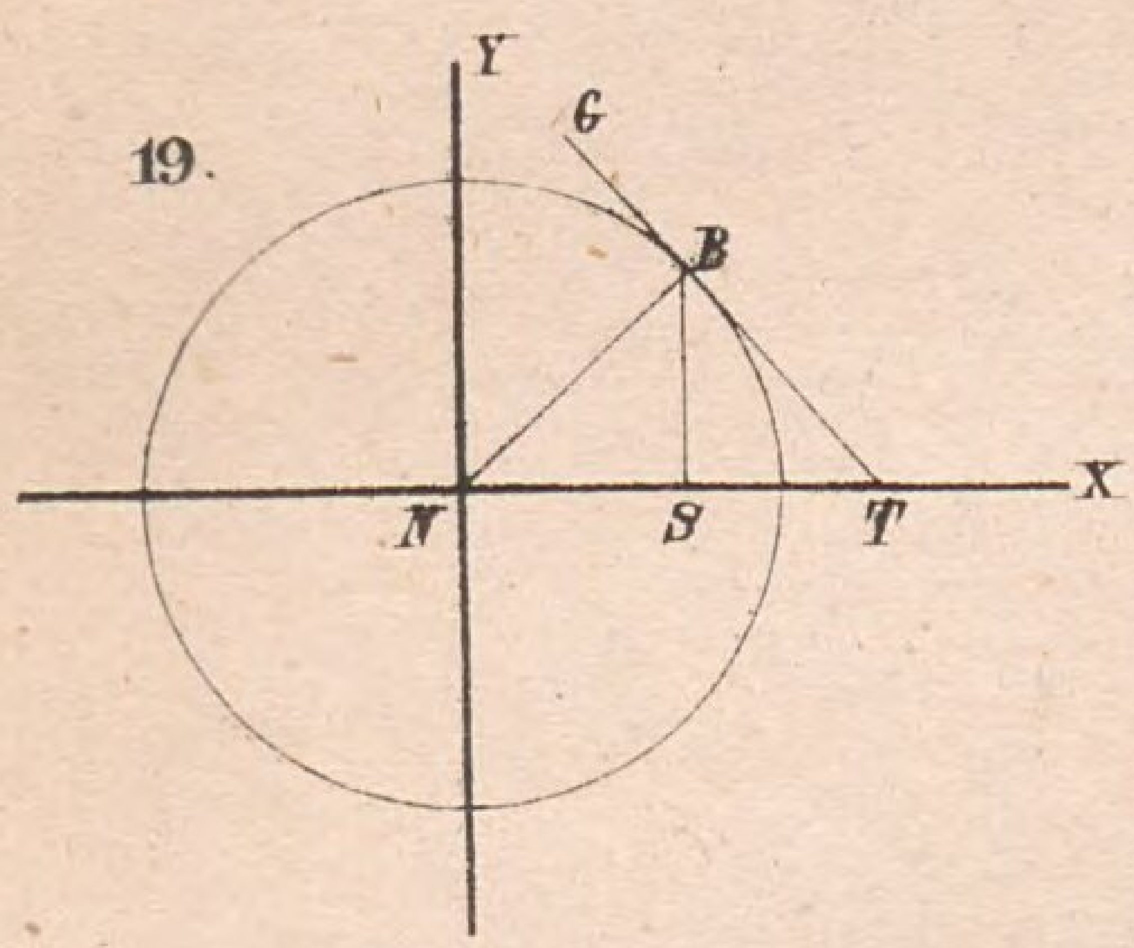

8.
Y
C
D
B
A
b
d
c
X
9.
Y
B
V
U
F
D
Z
A
C
E
X
D'
10.
Y
B
A
D
X
C
11.
Y
B
C
E
A
X
12.
Y
C
F
A
G
X
B
13.
Y
C
P
B
R
F
H
G
A
D
E
Q
X
14.
E
Y
P
C
D
K
H
L
B
A
G
F
X
15.
r
y
A
x
16.
Y
r
y'
y
M
x'
A
a
b
x
X

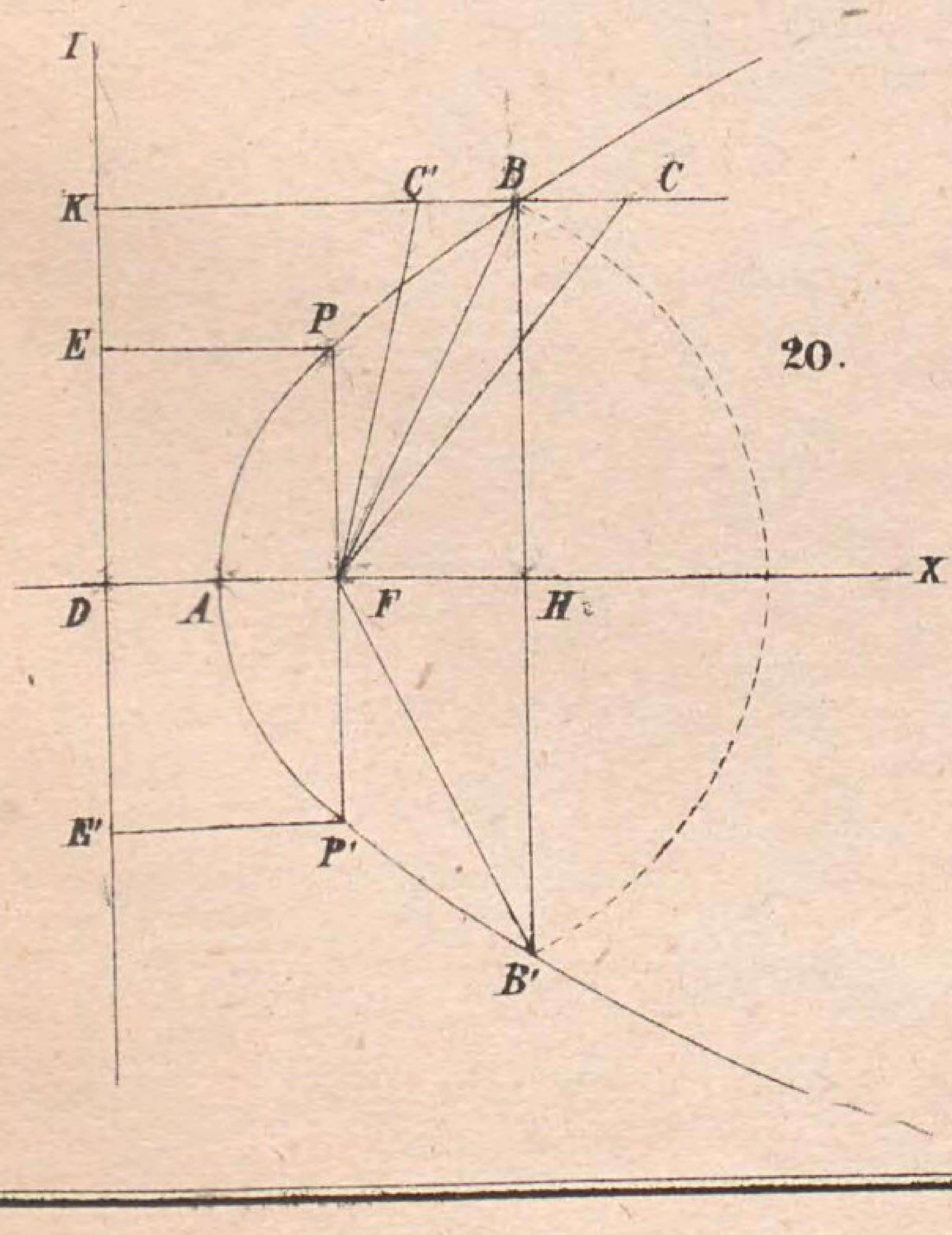

17.
y
M
A
x
2r-x
D

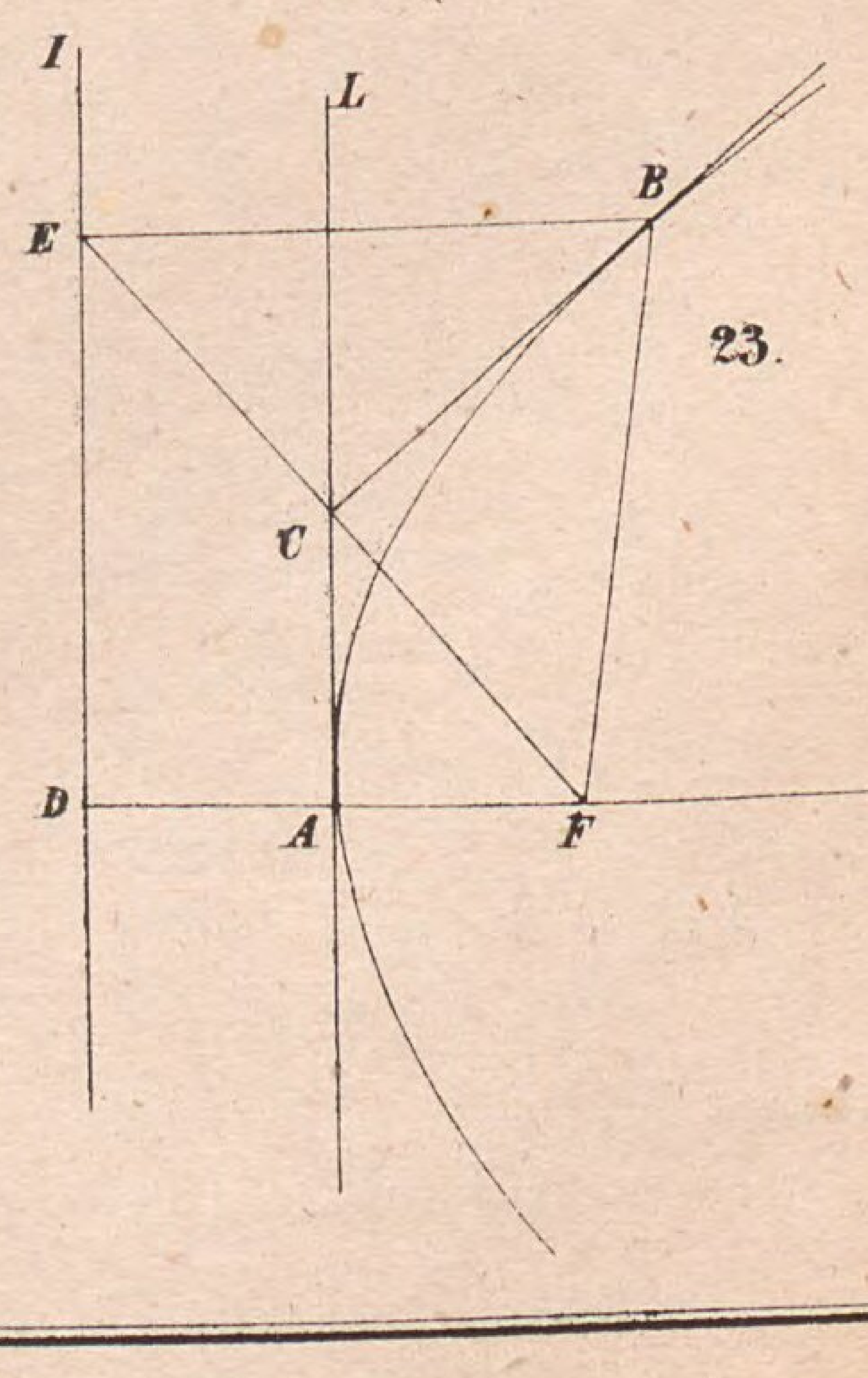

I
C
K
E
S
B
21.
T
D
A
F
X


G
B
18.
A
N
S
T

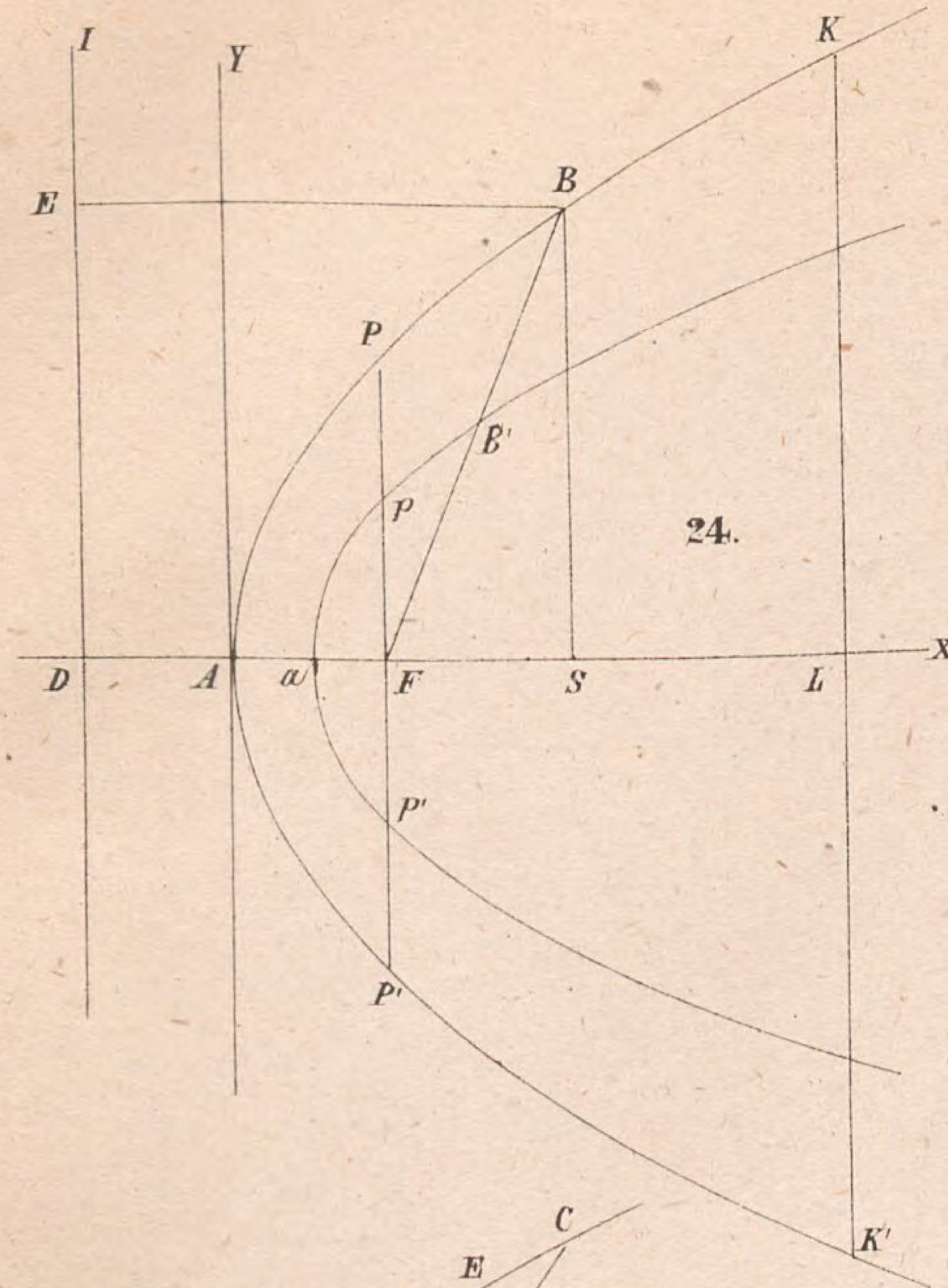

I
E
B
22.
C
L
H
O
K
D
Q
A
F
X
E'
B'


Y
G
19.
B
N
S
T
X

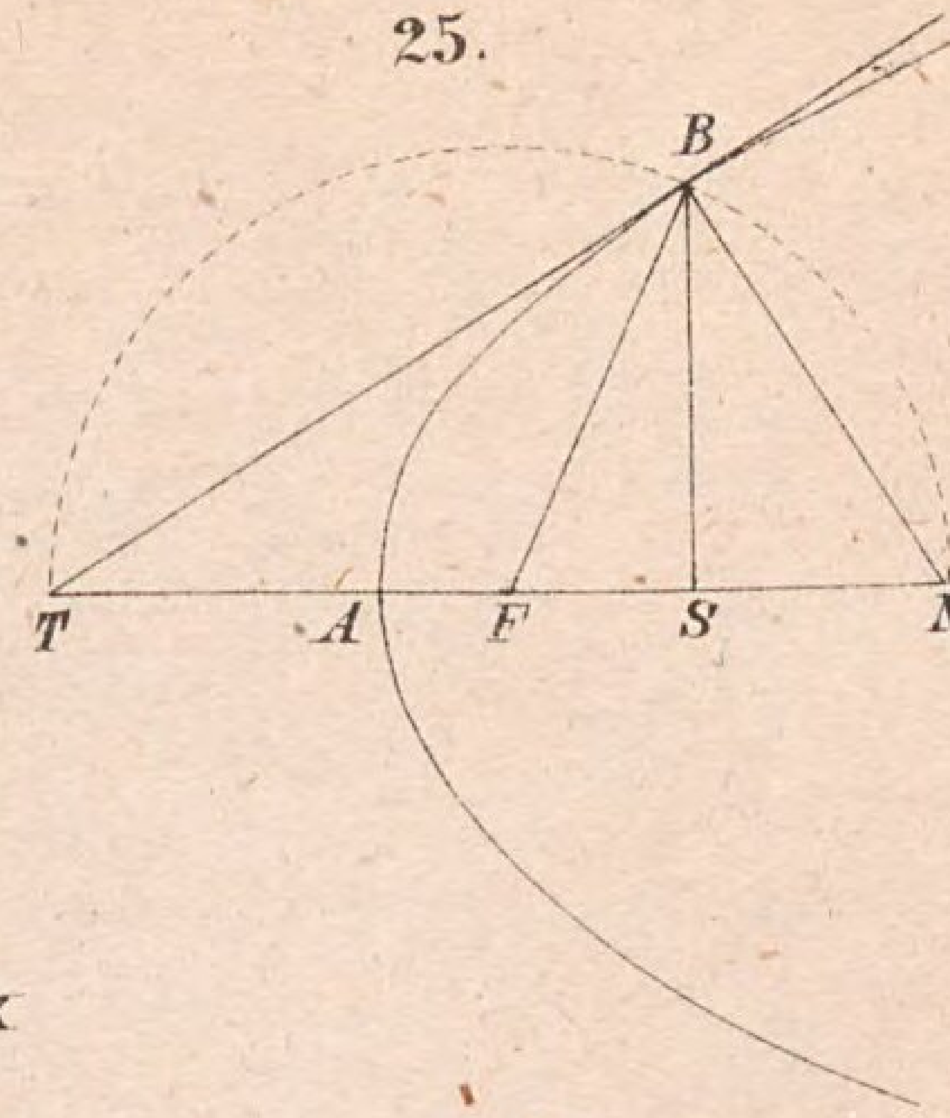

I
K
C'
B
C
E
P
20.
D
A
F
H
X
E'
P'
B'


I
L
B
E
23.
C
D
A
F

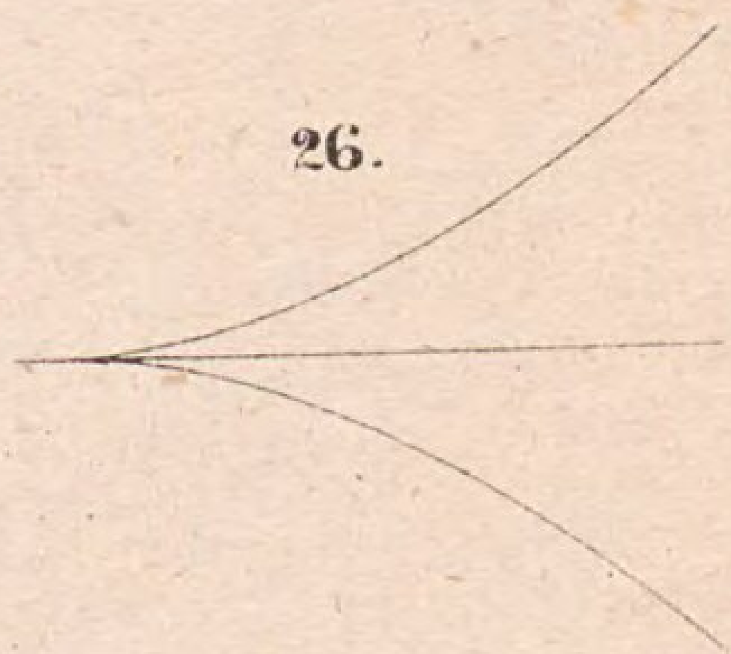
24.



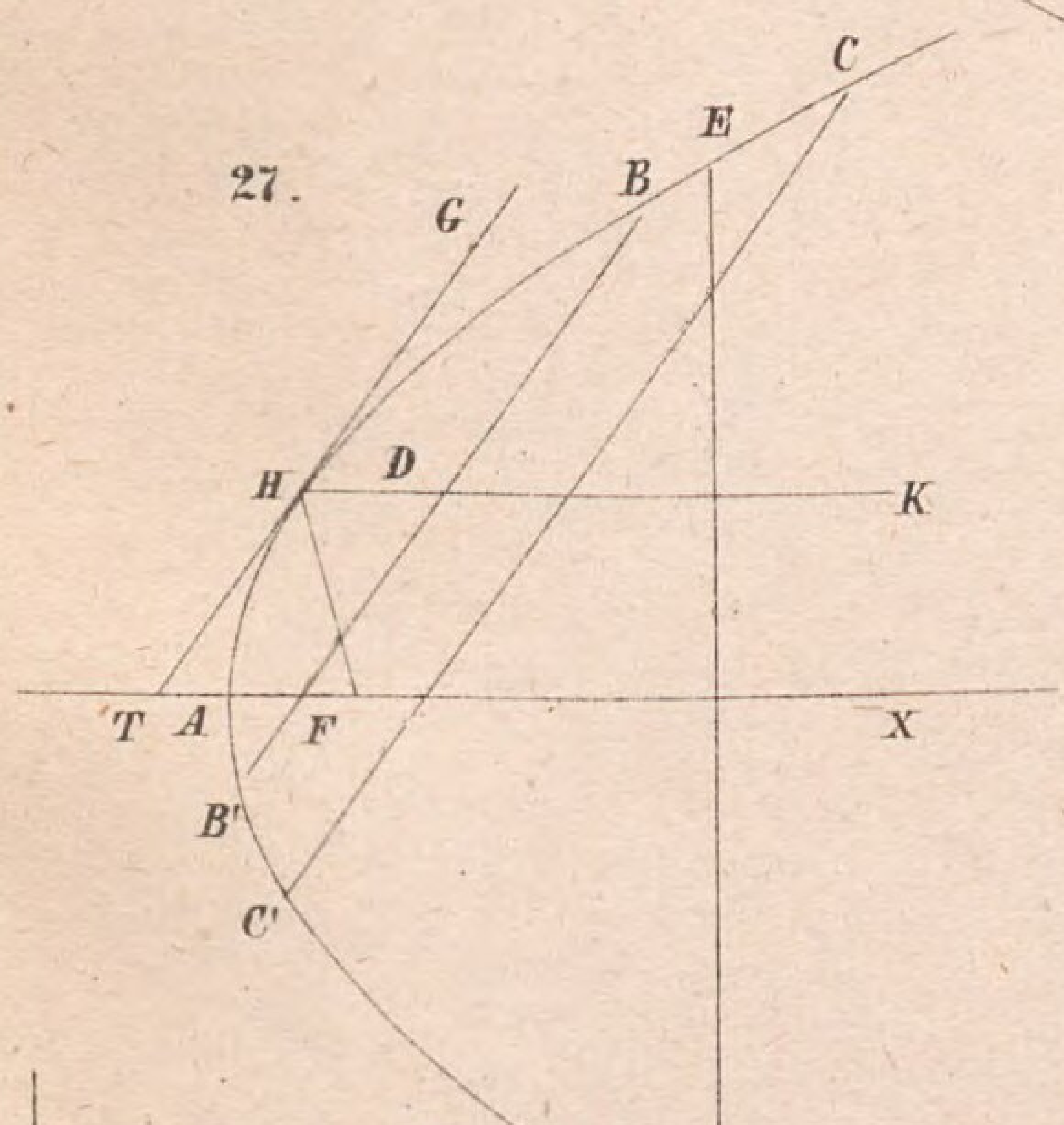
25.



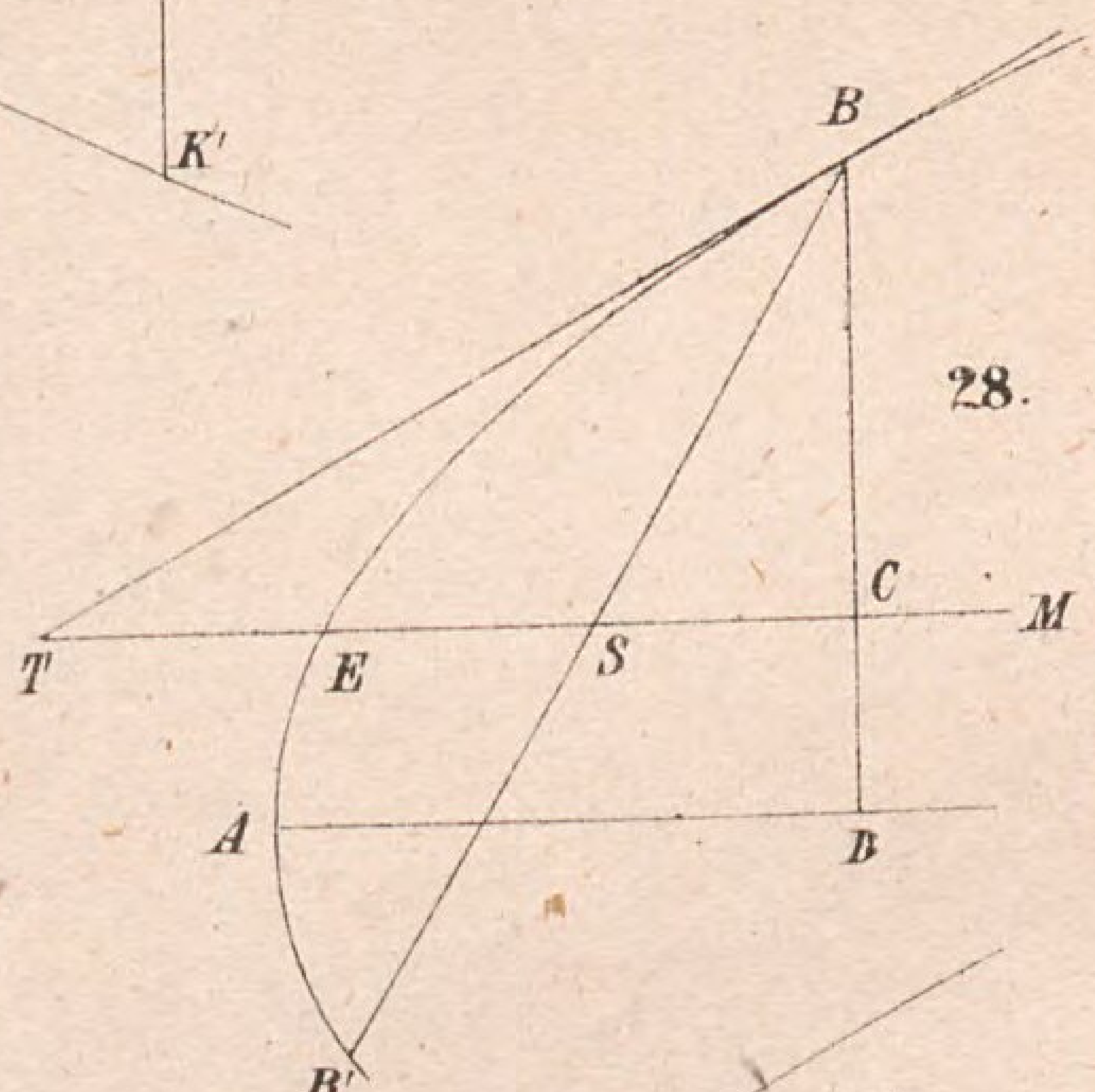
26.



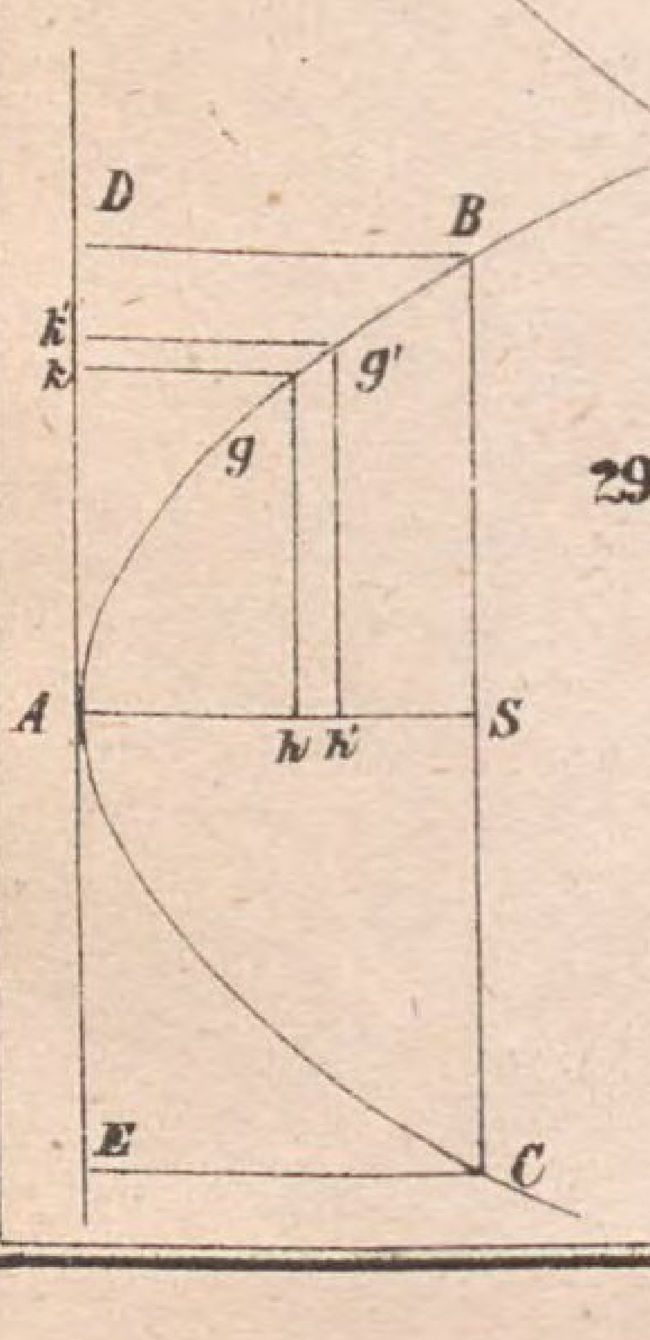
27.



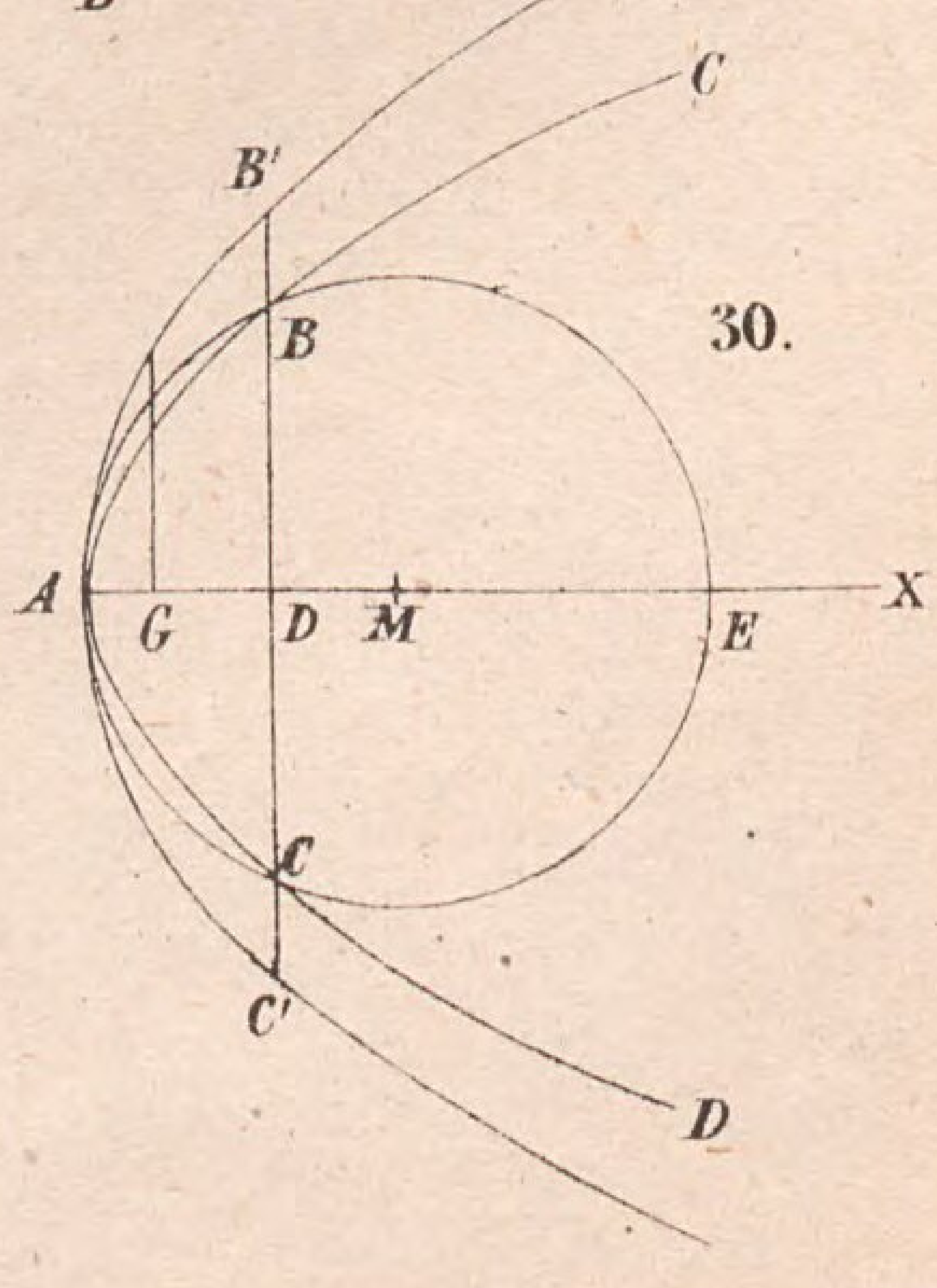
28.

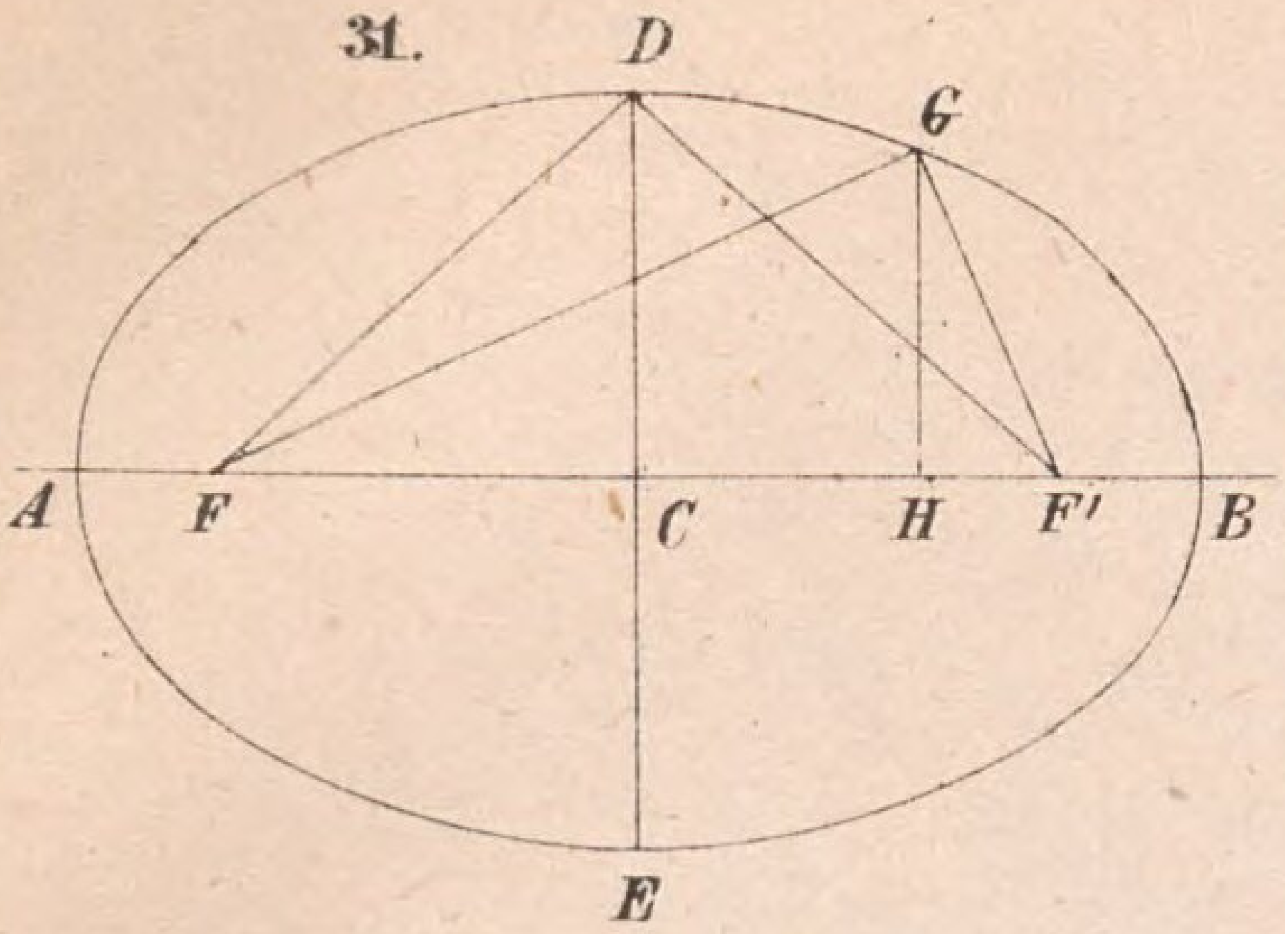


29.

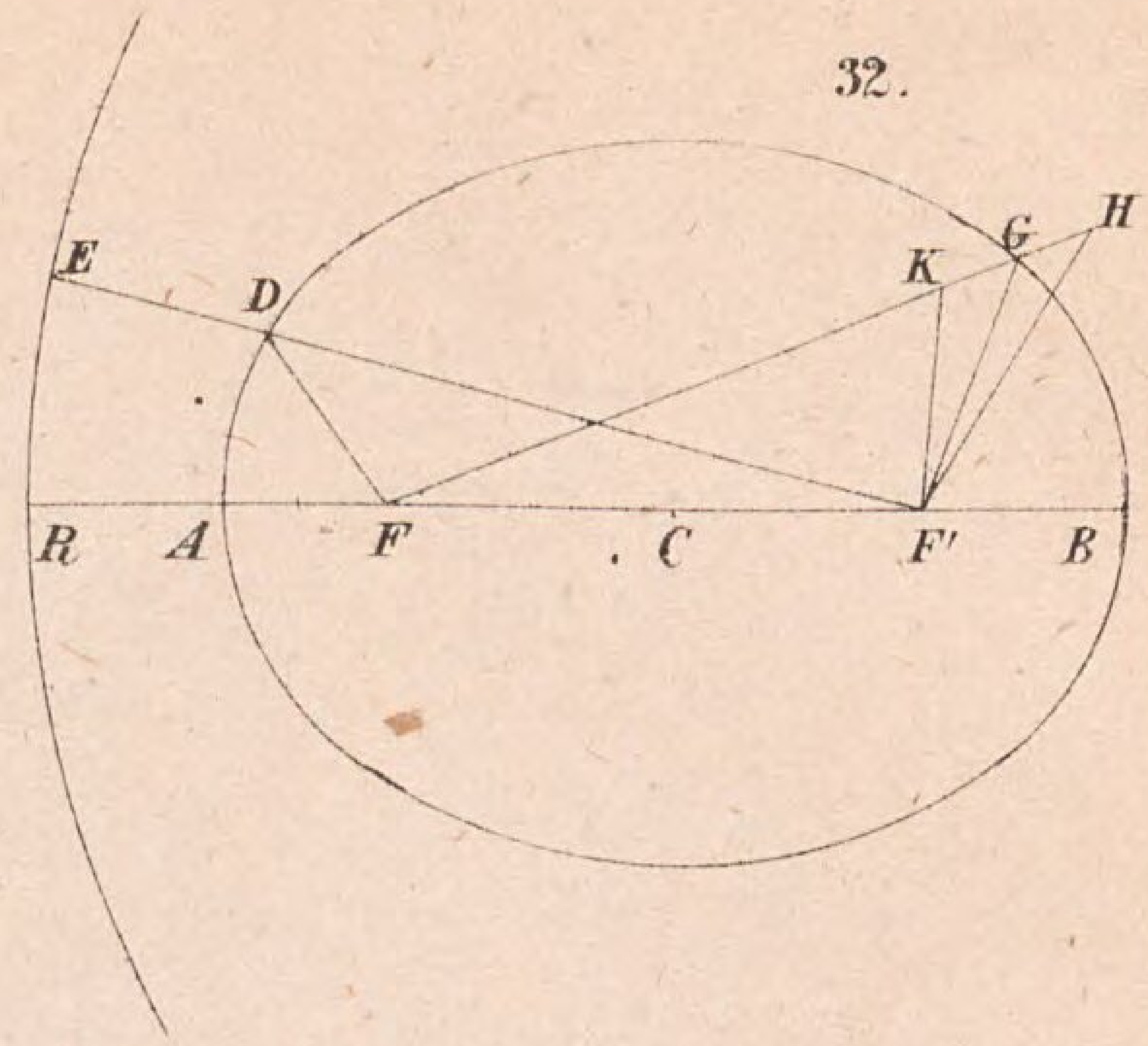


30.

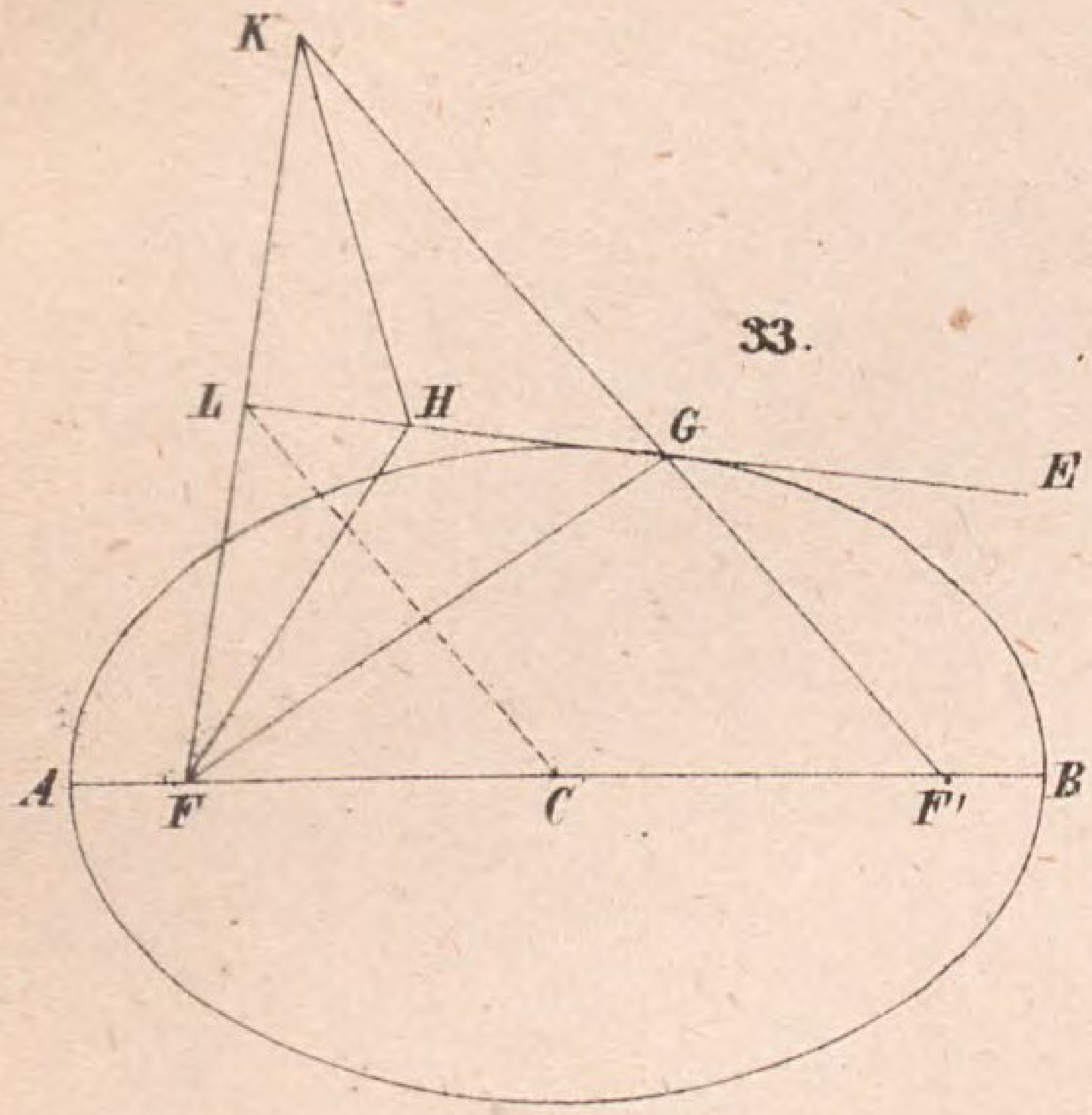




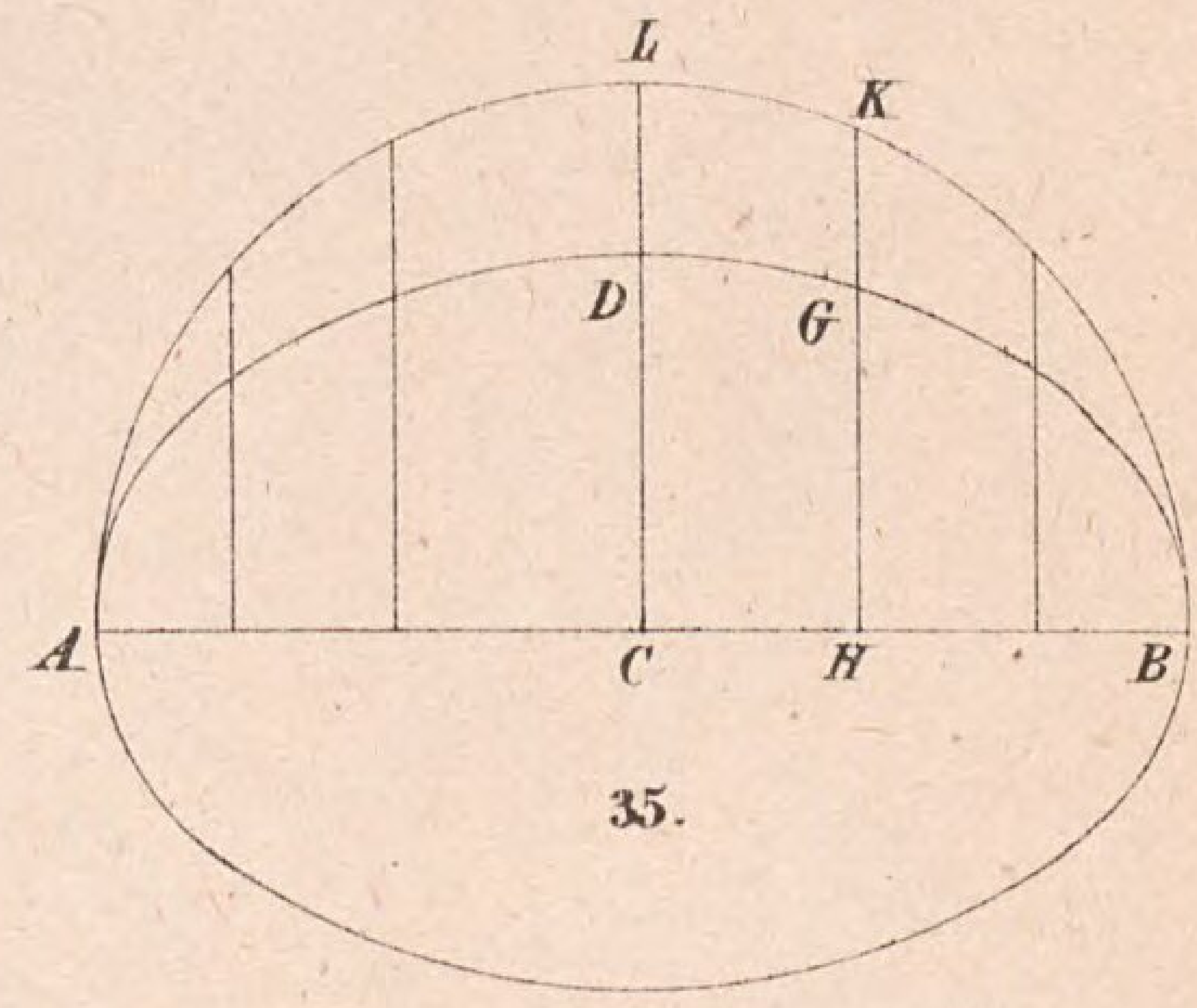
31.



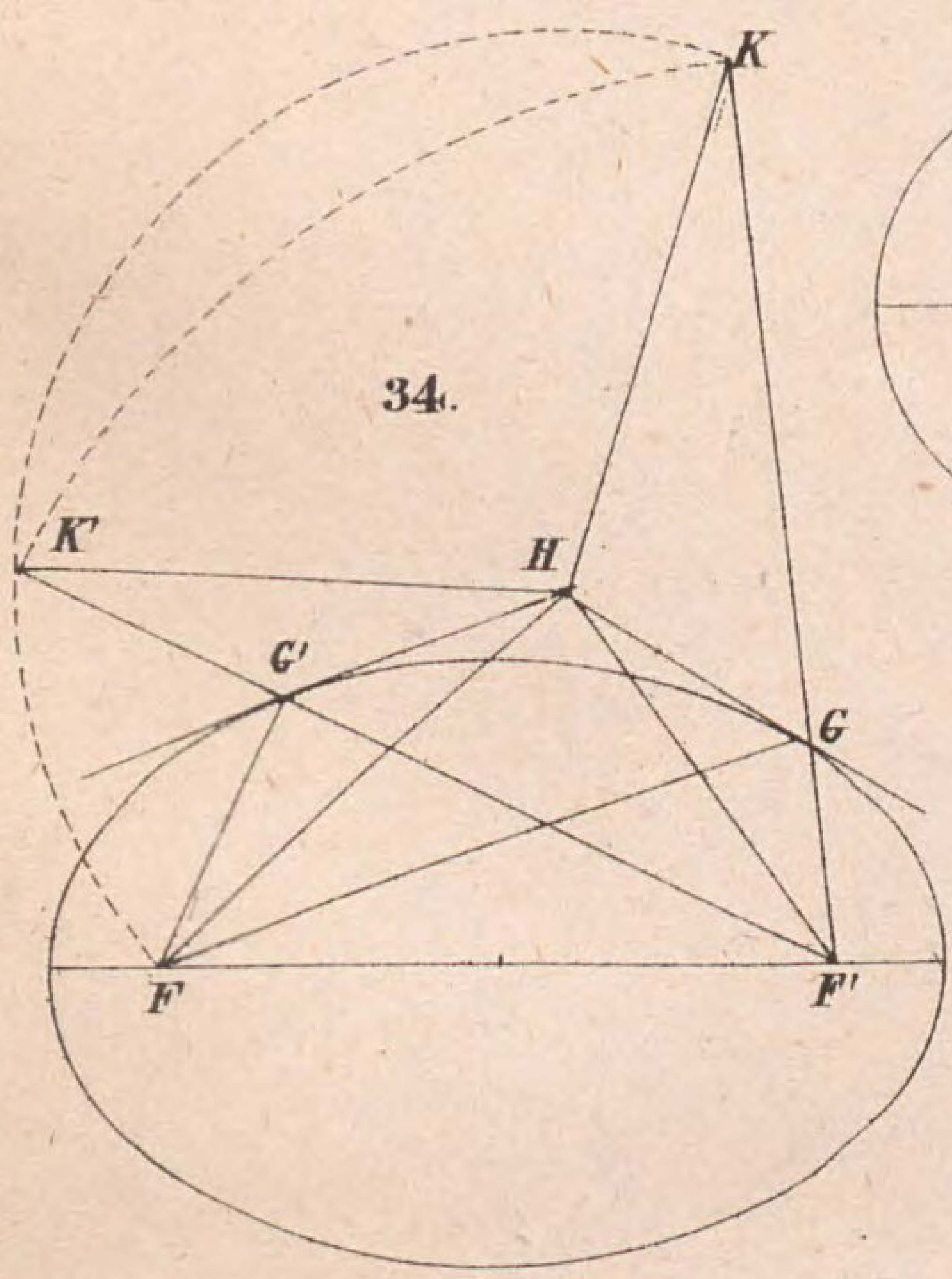
32.



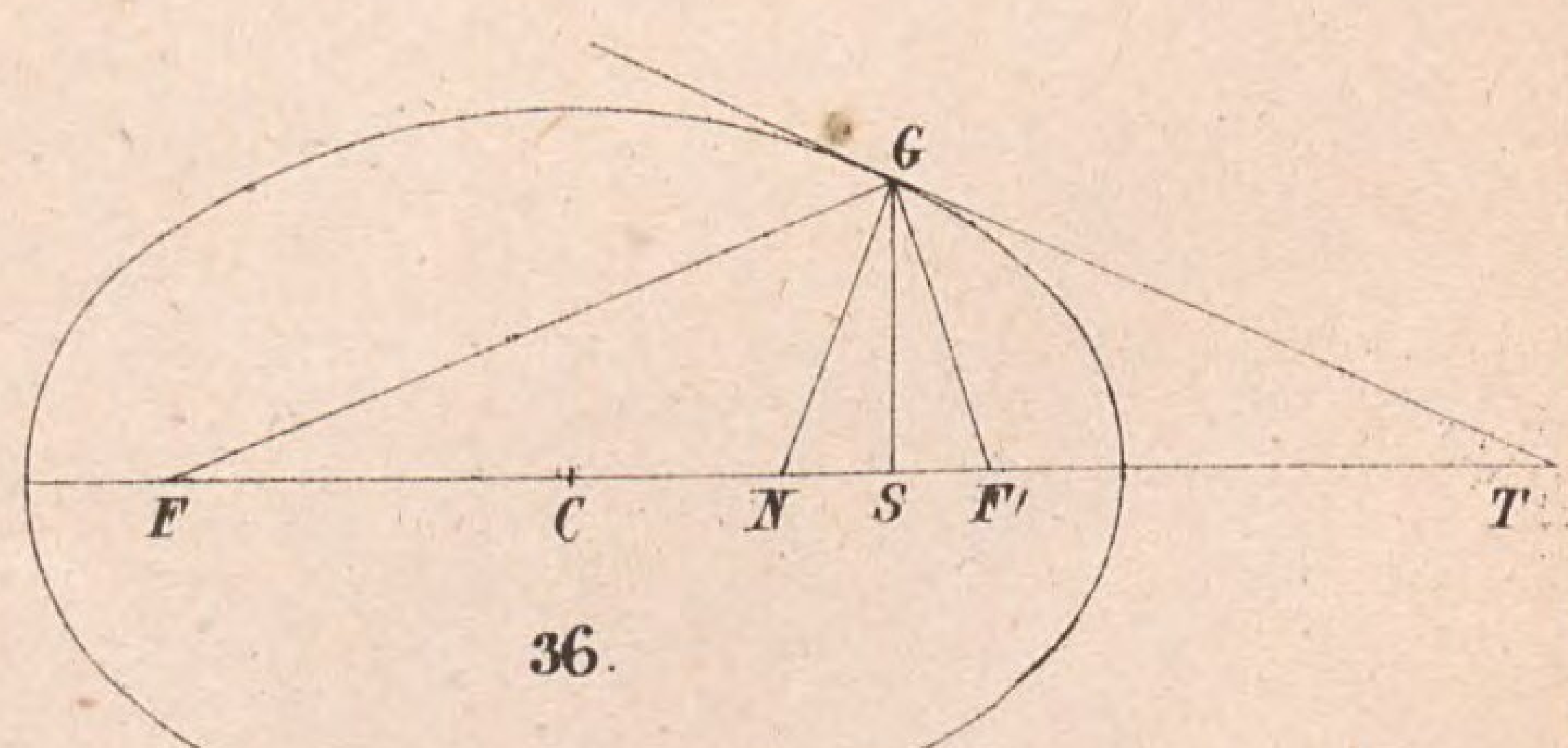
33.



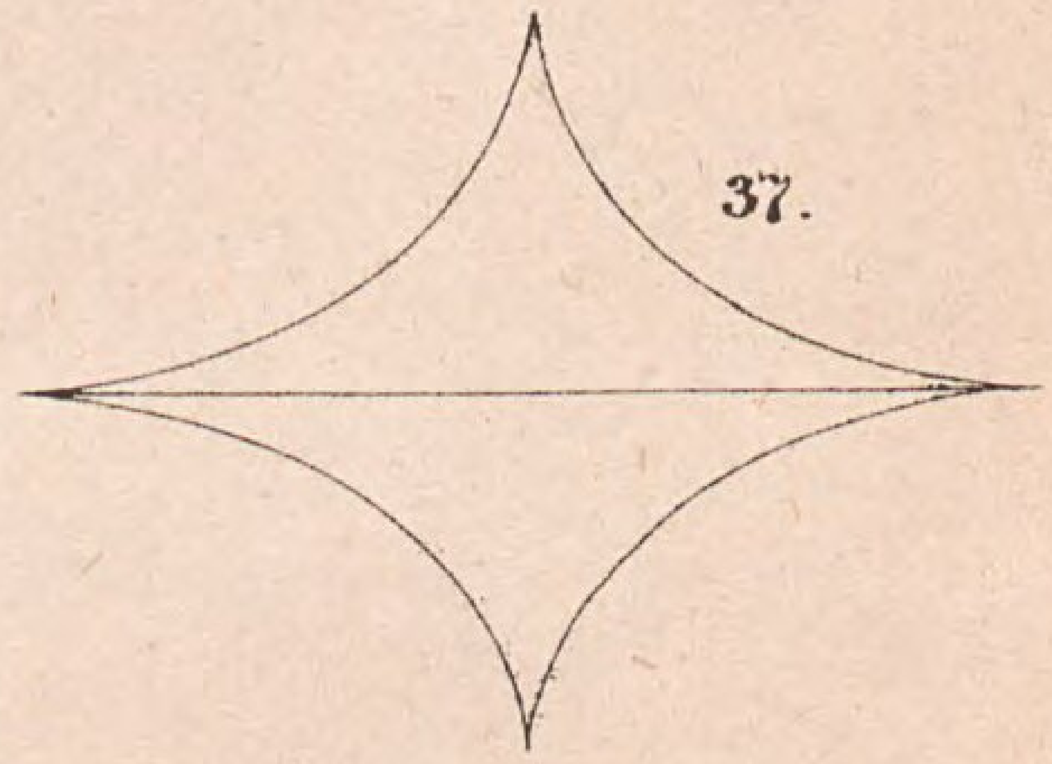
35.



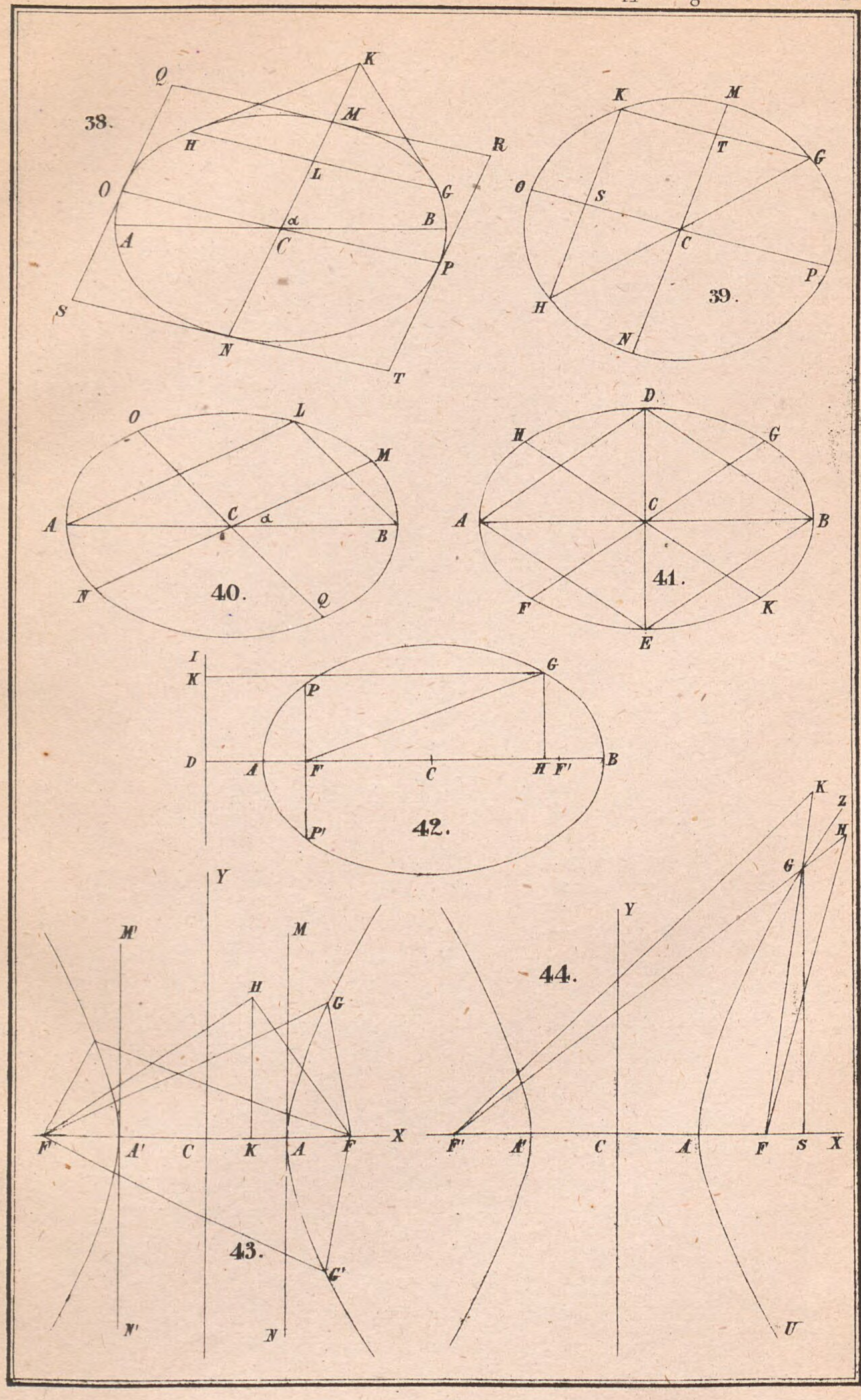
34.

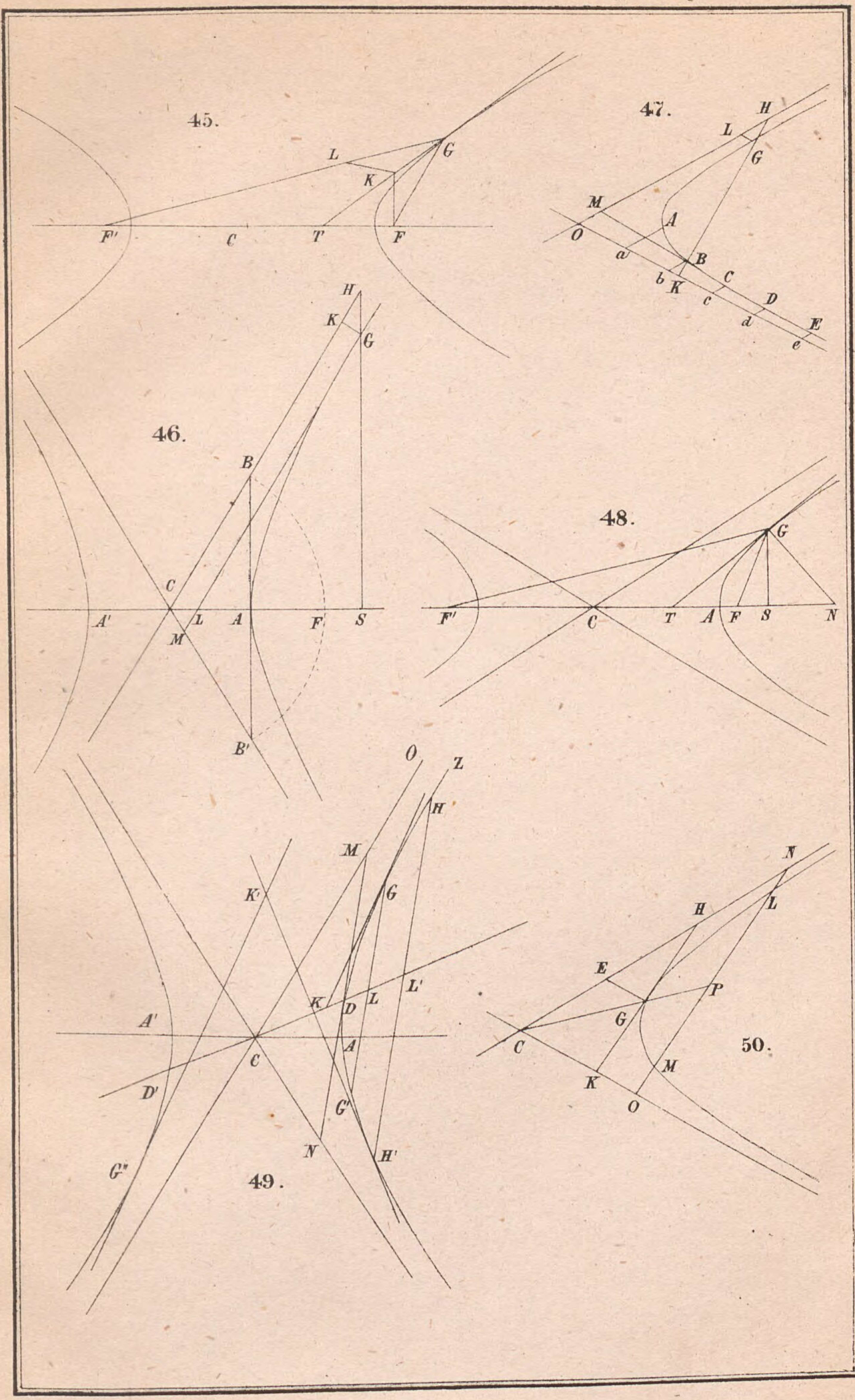


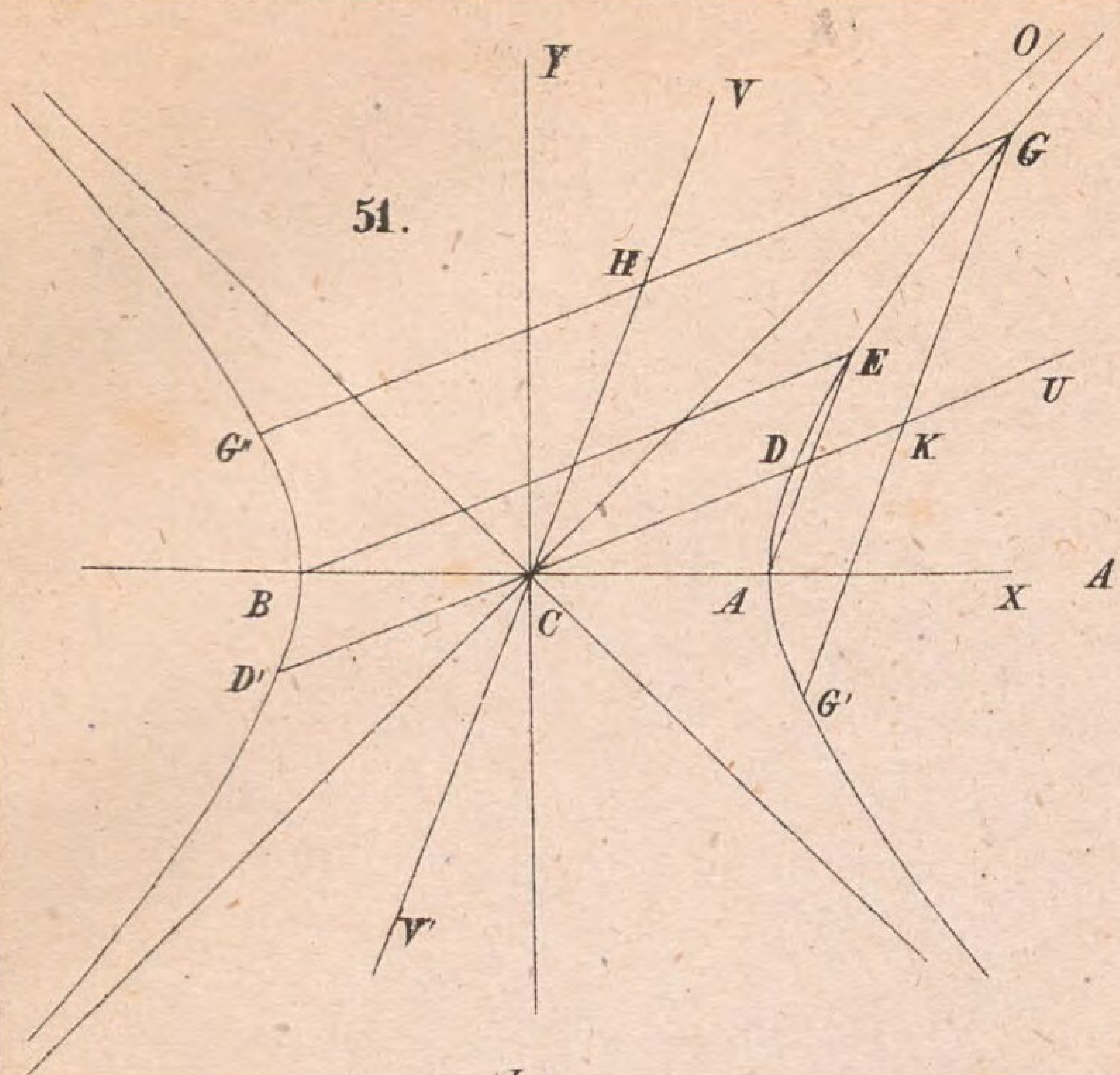
36.



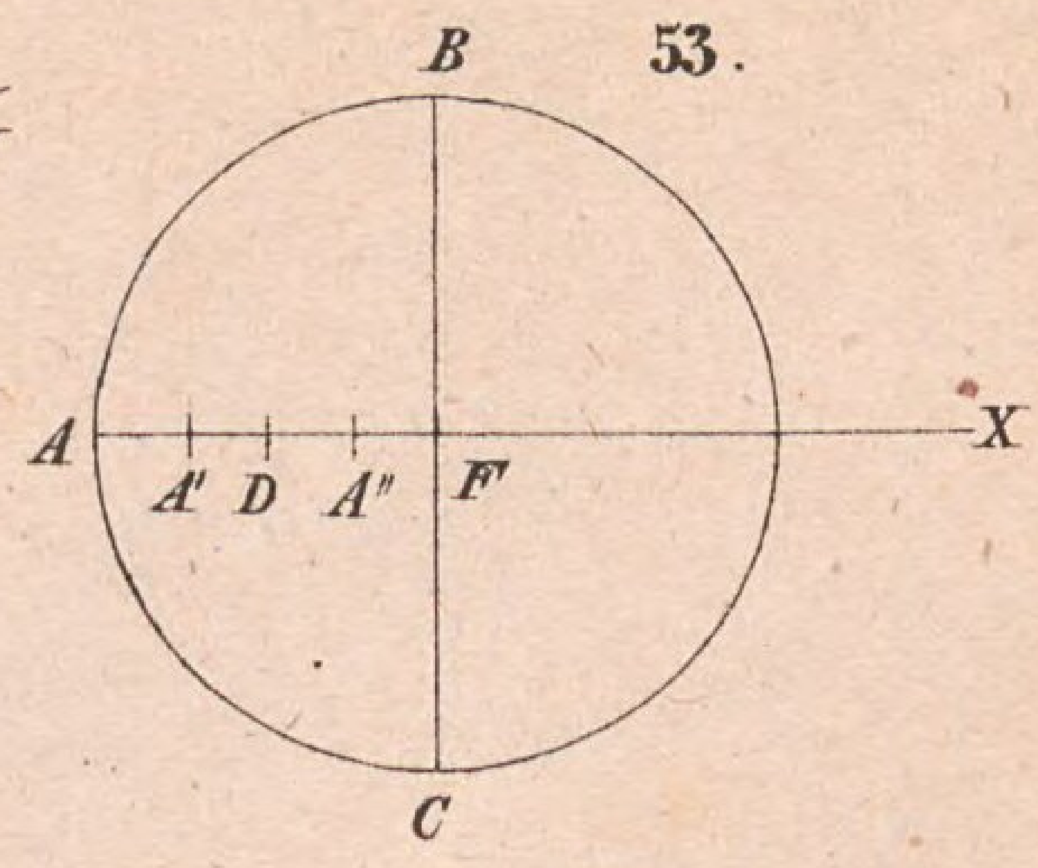
37.


38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.

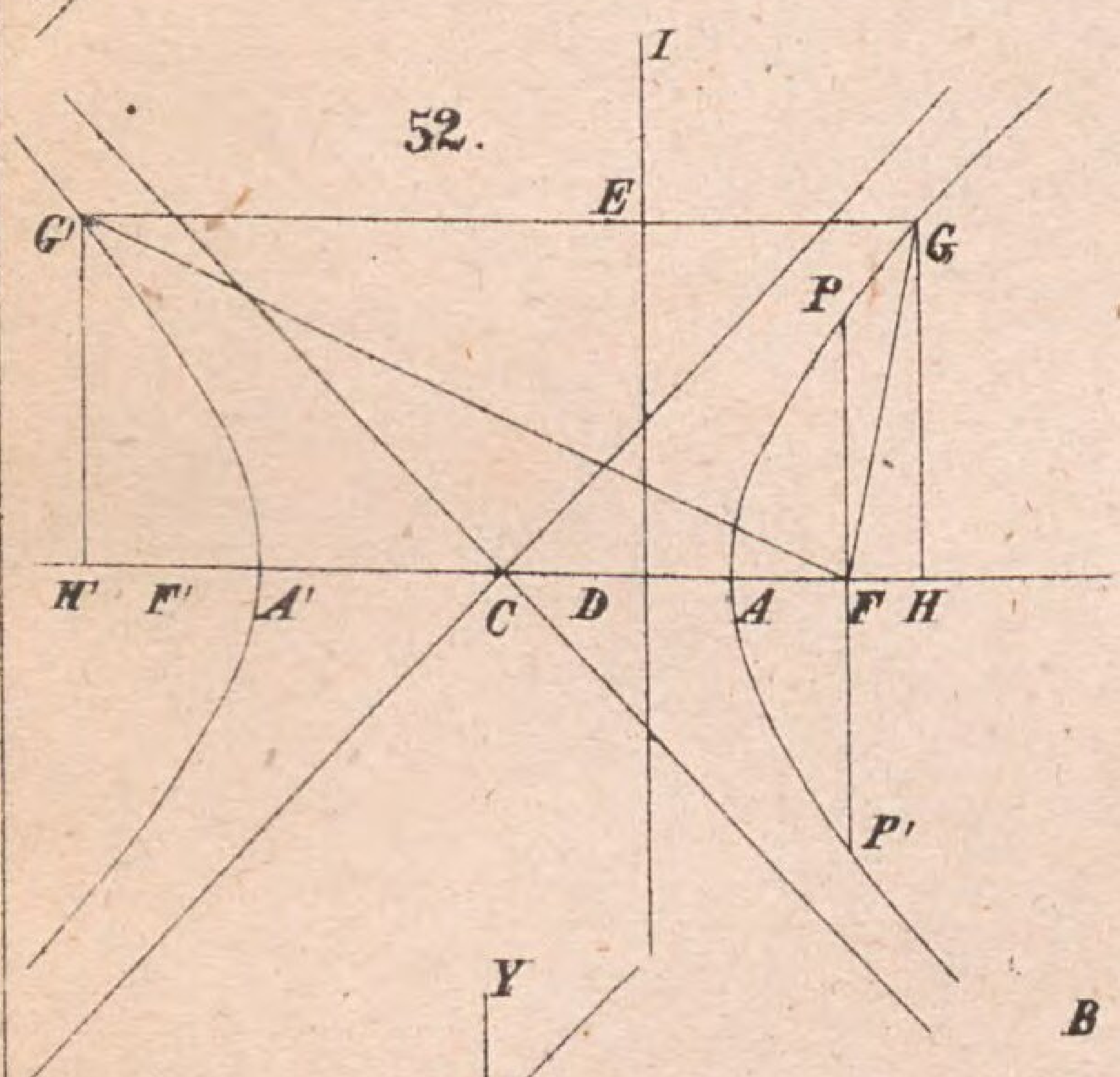

45.
L
G
K
F'
C
T
F
47.
H
L
G
M
A
O
a
B
b
K
C
c
D
d
E
e
H
K
G
46.
B
C
A'
L
A
F
S
M
B'
48.
G
F'
C
T
A
F
S
N
O
Z
H
M
K'
G
N
H
L
E
P
G
C
50.
M
K
O
K
D
L
L'
A'
A
C
D'
G'
G"
N
H'
49.



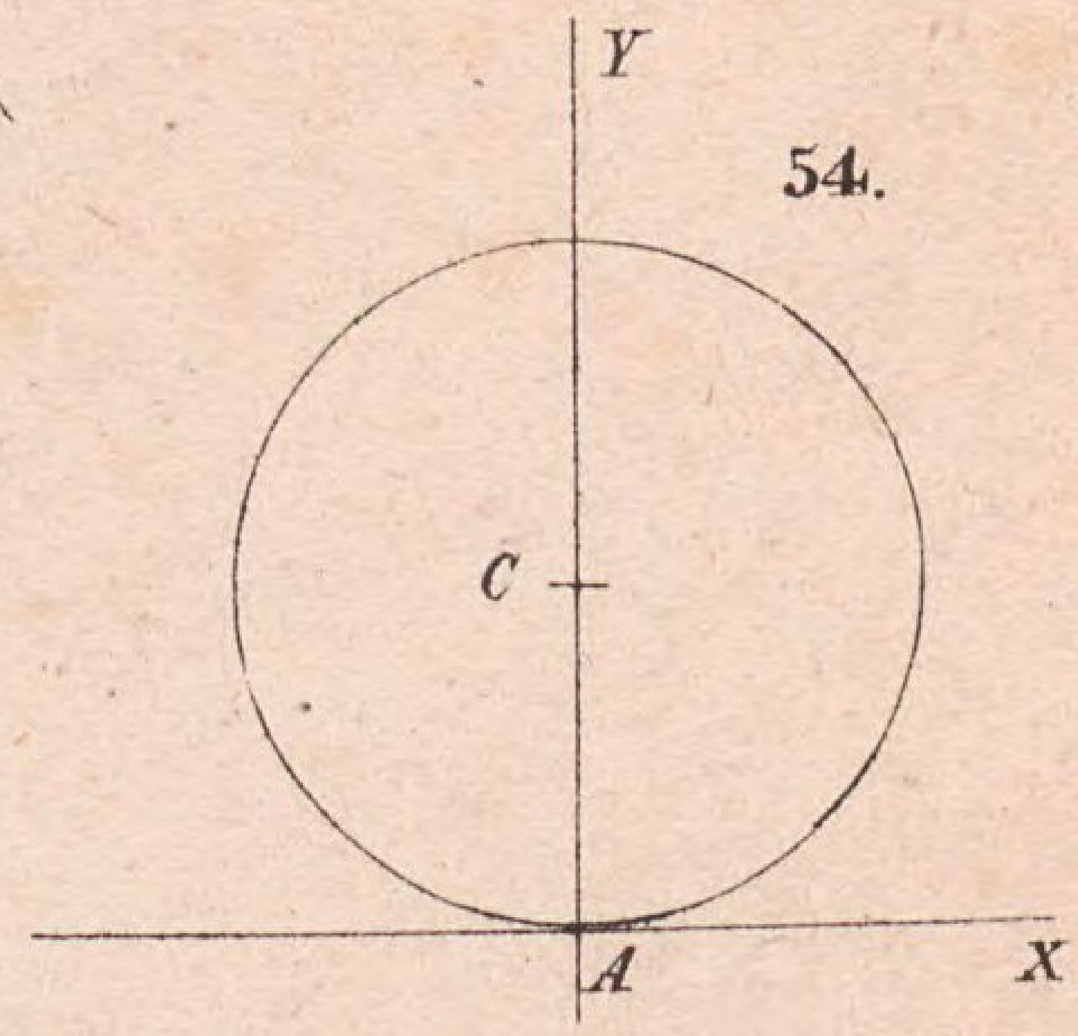
51.



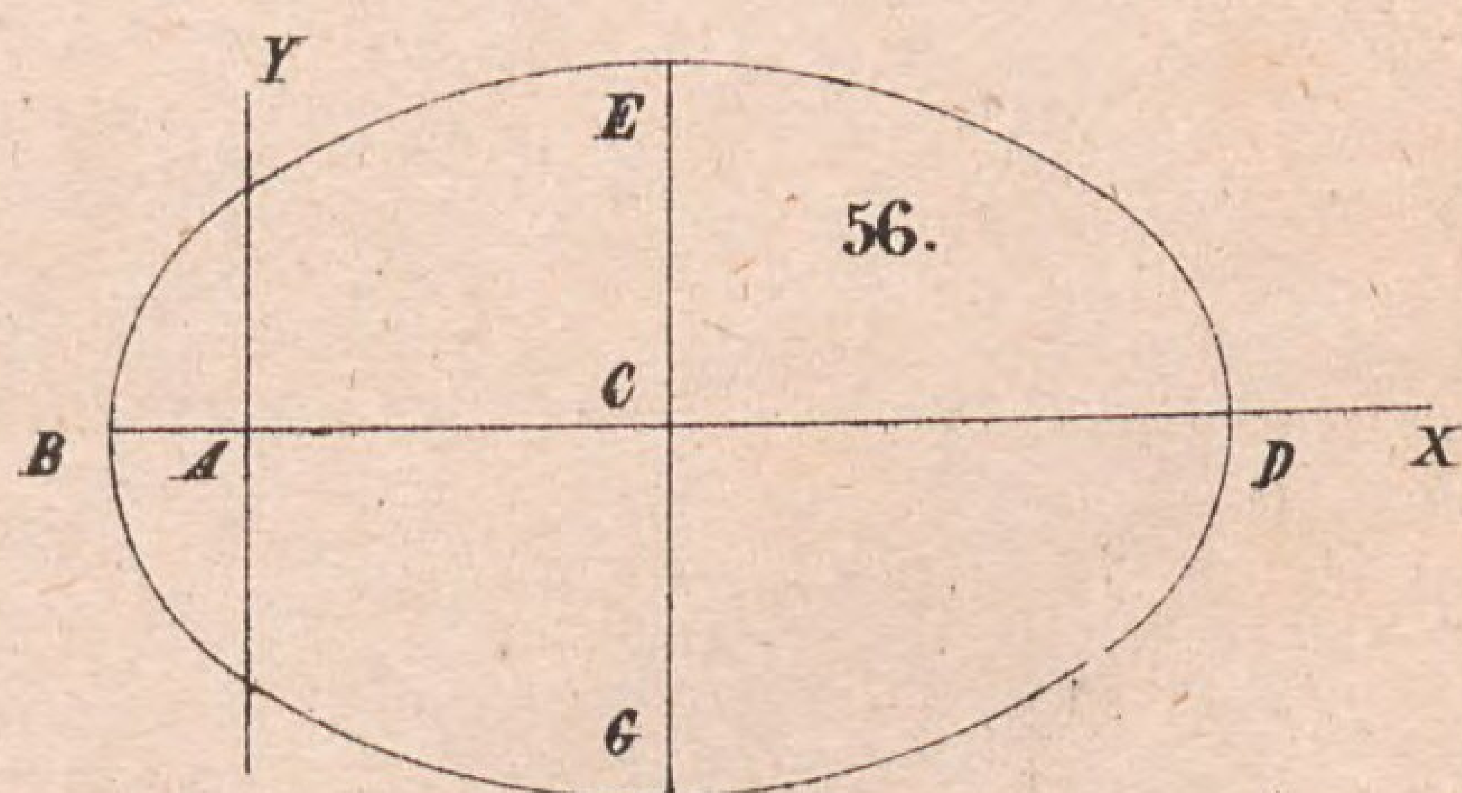
53.



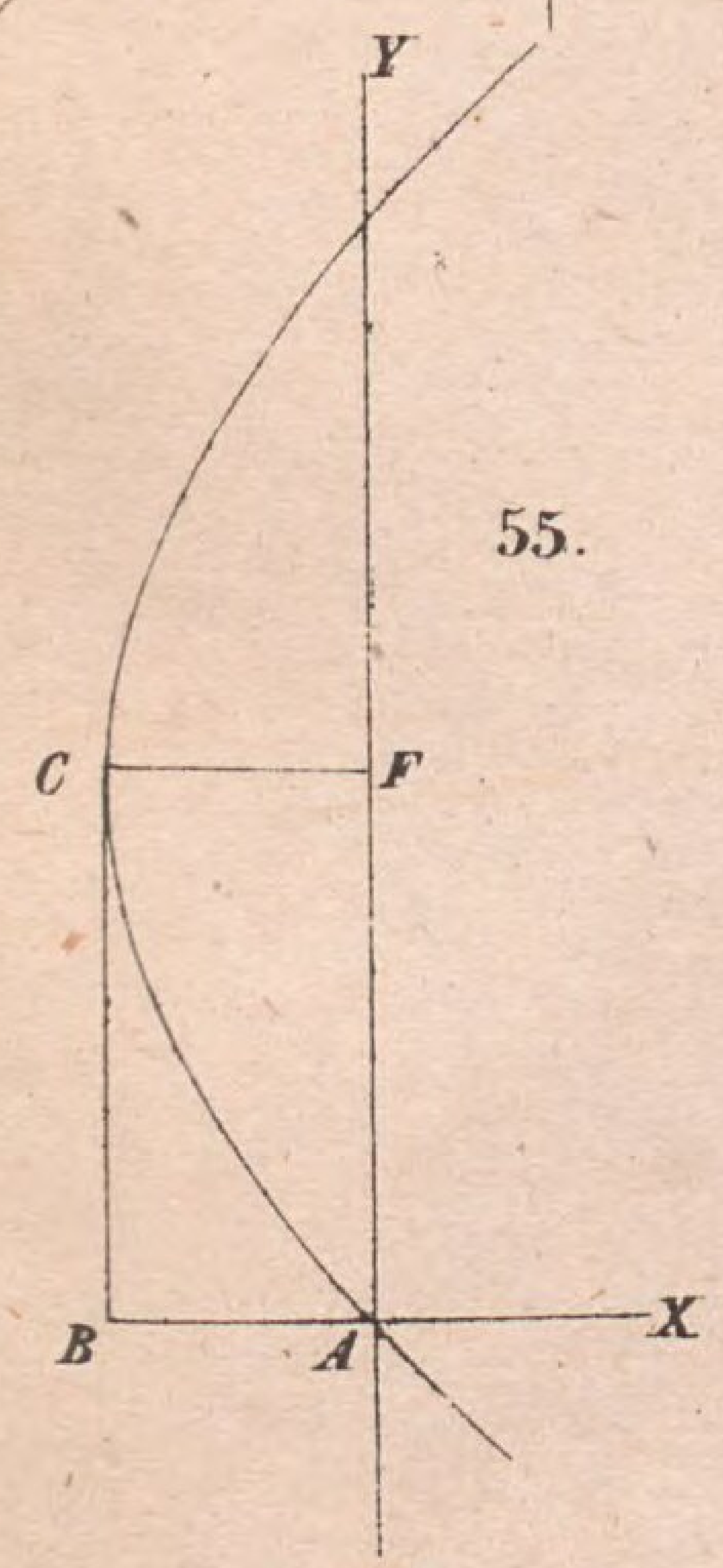
52.



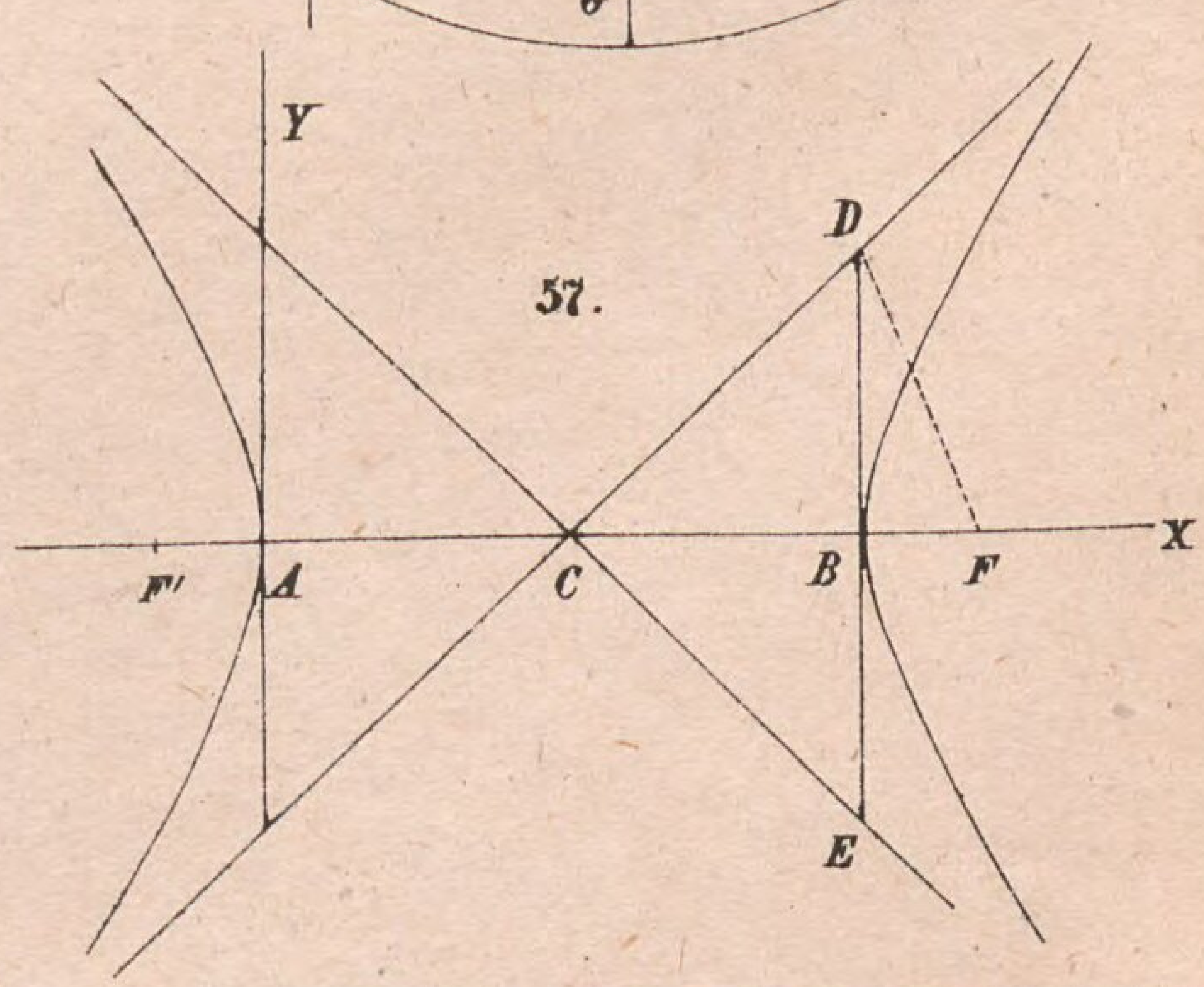
54.



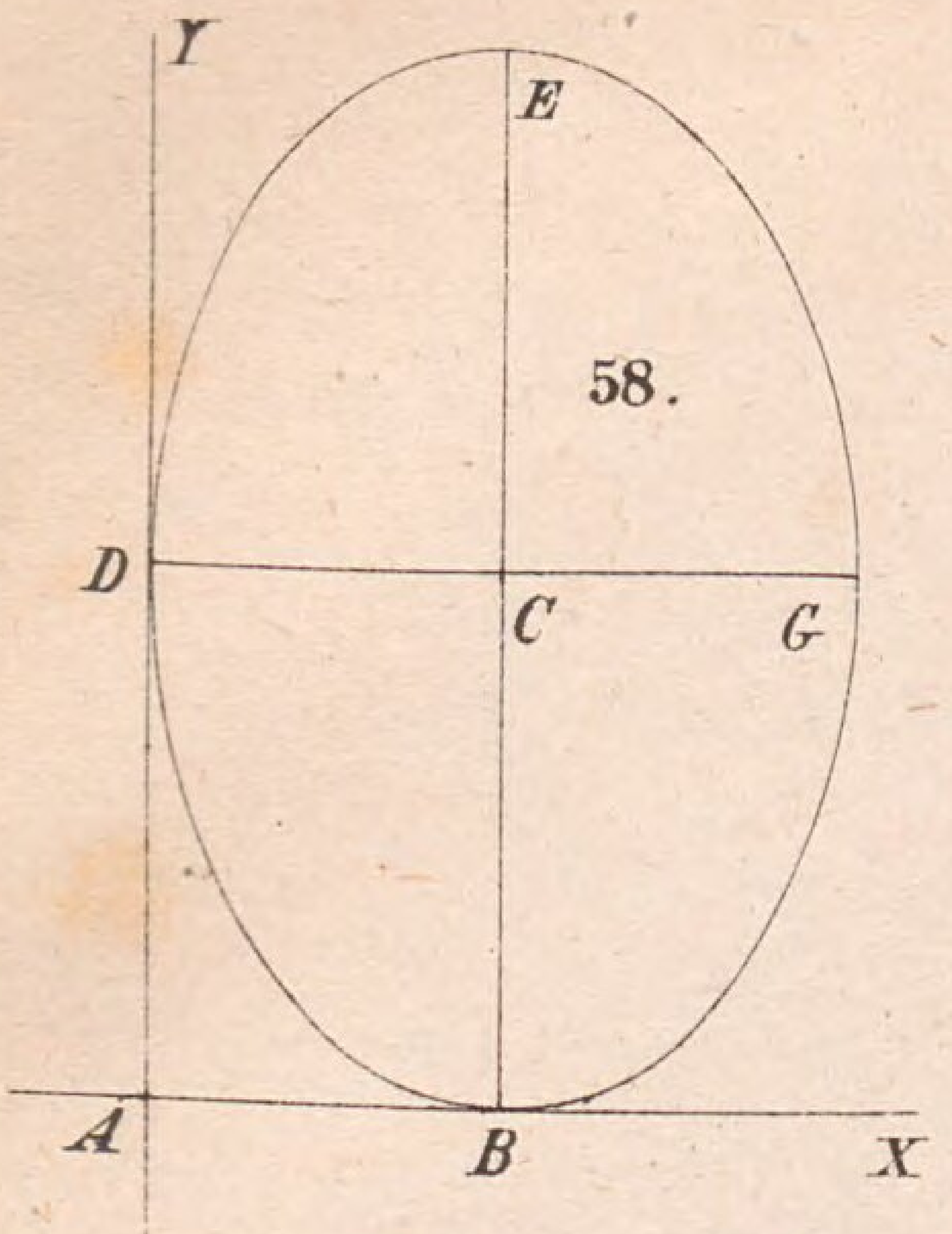
56.

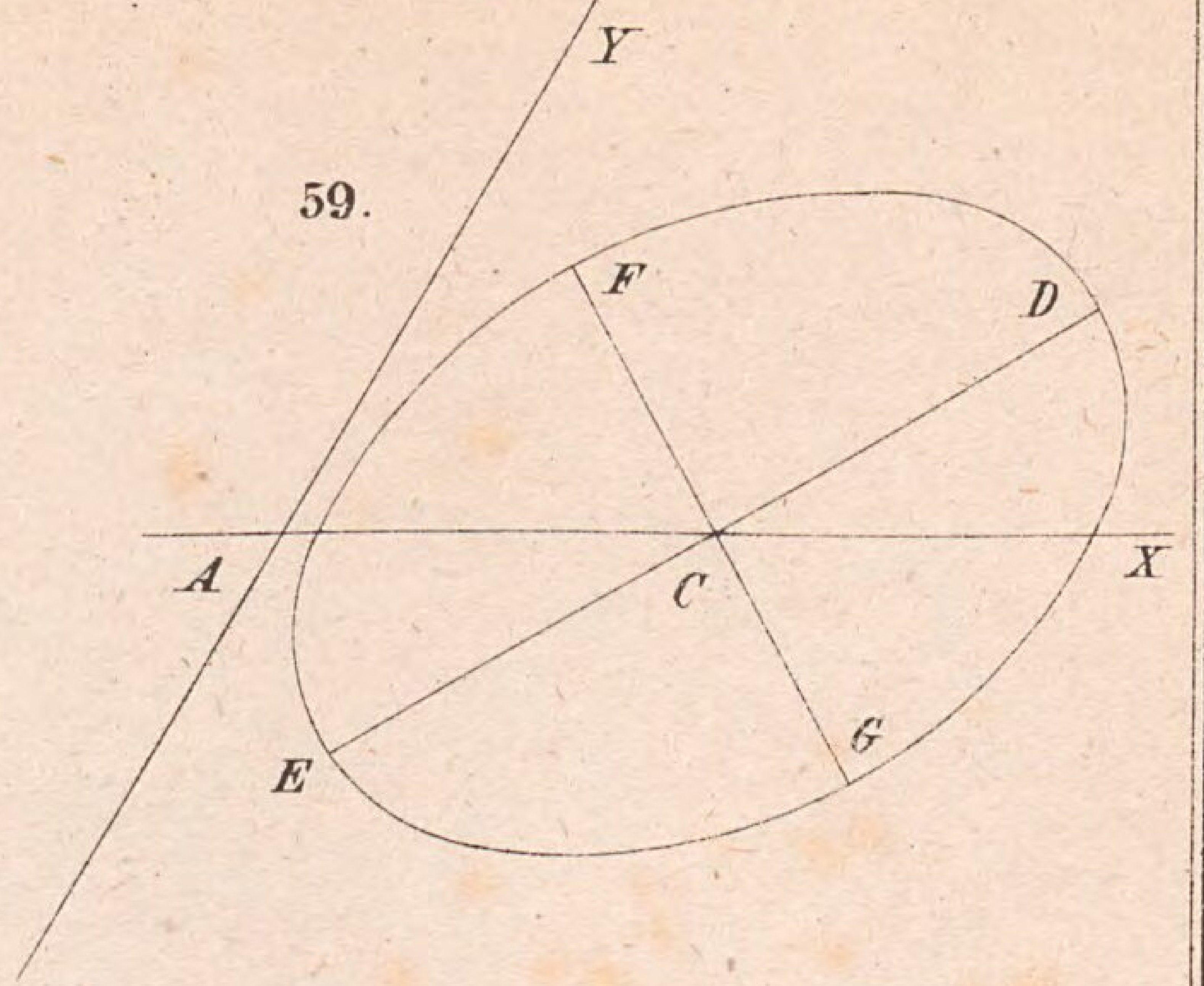


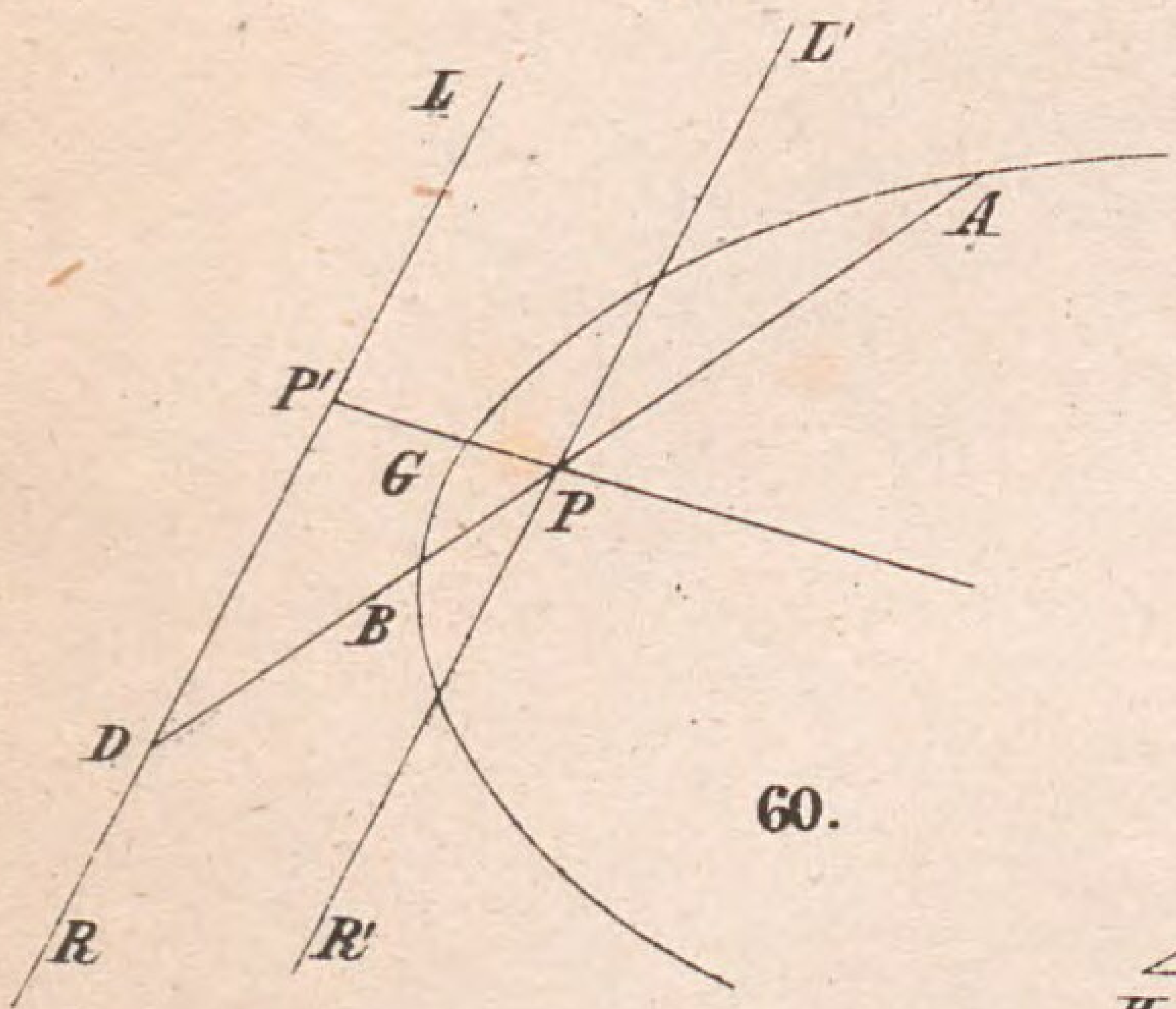
55.

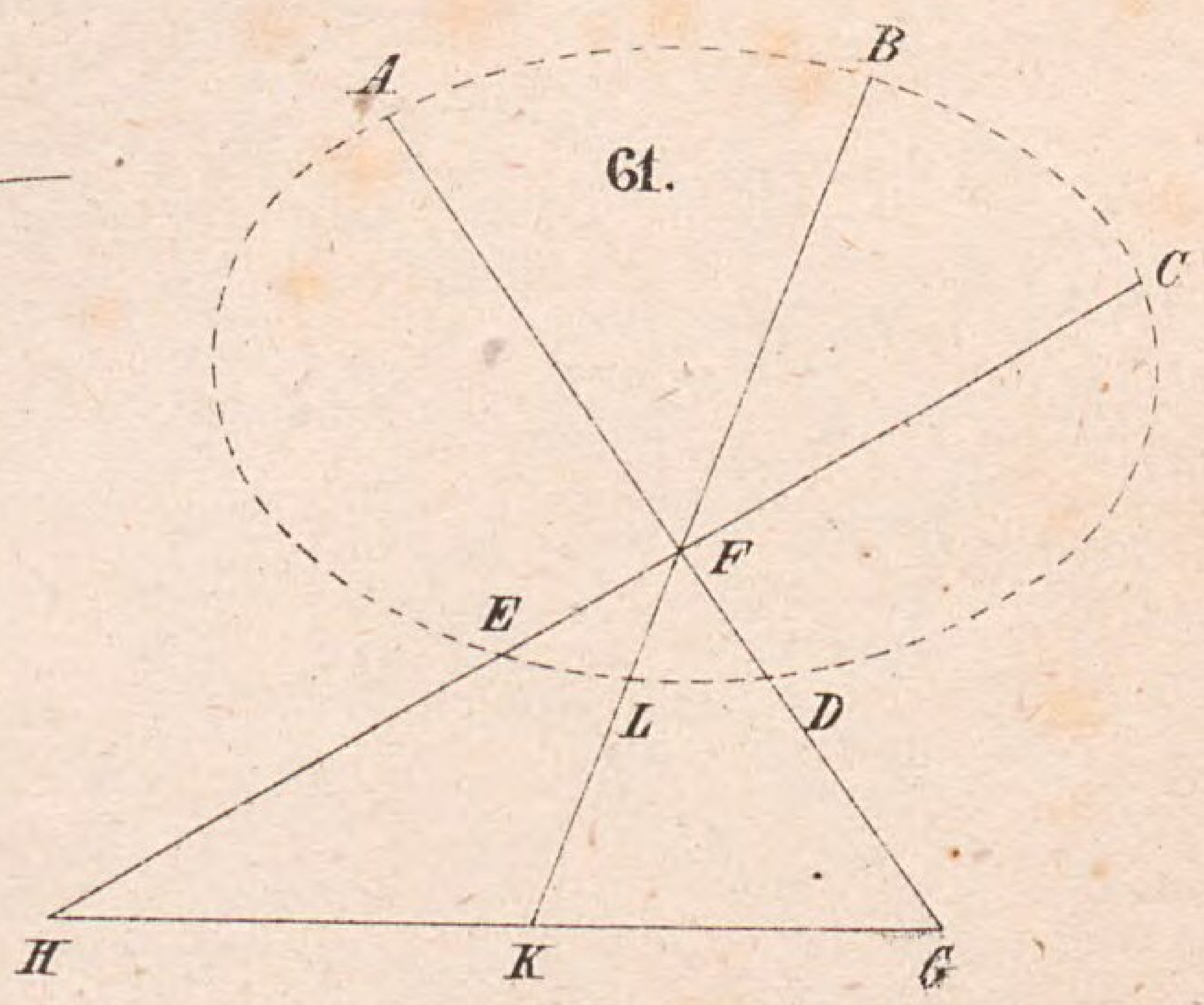


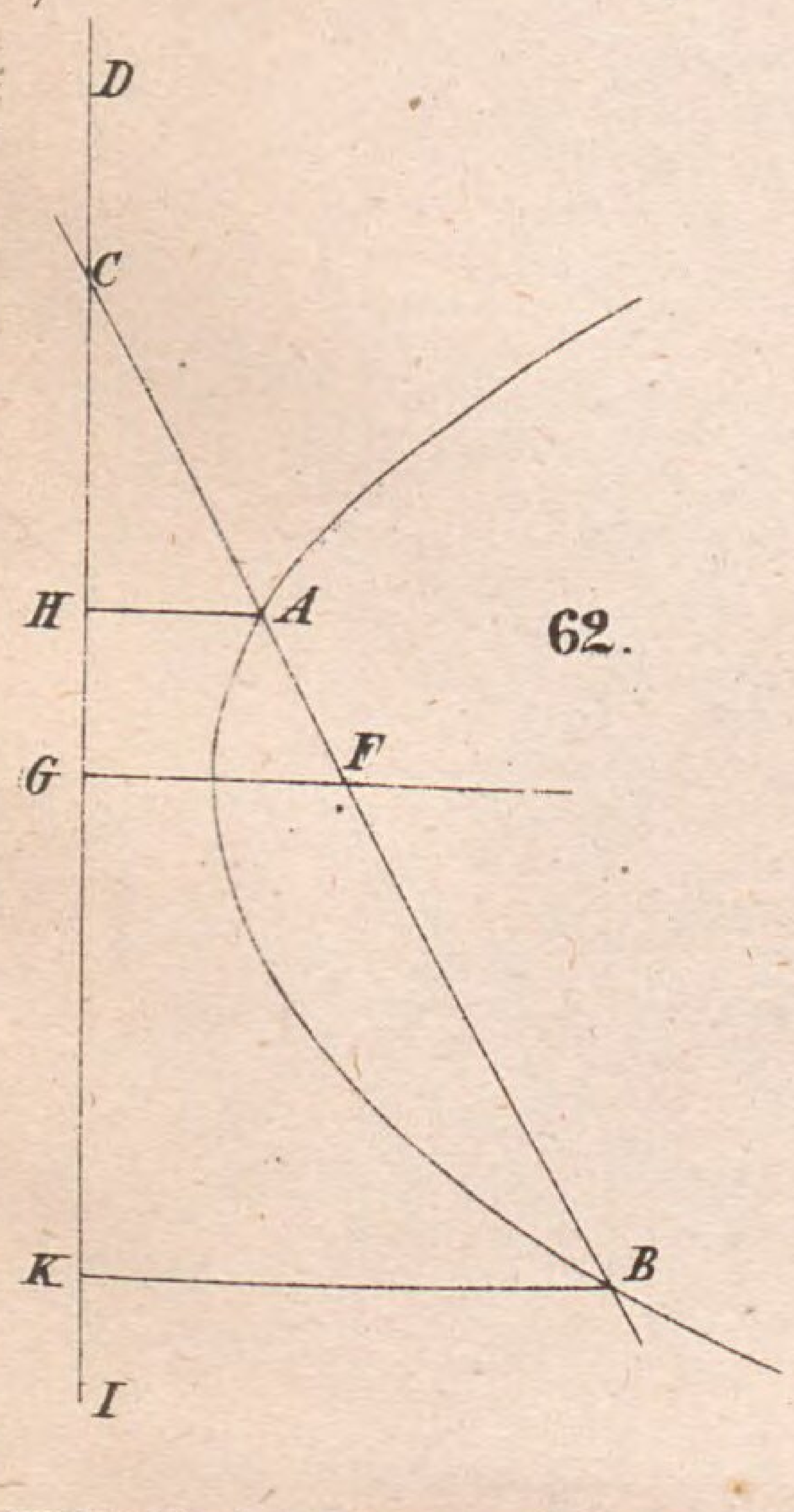
57.

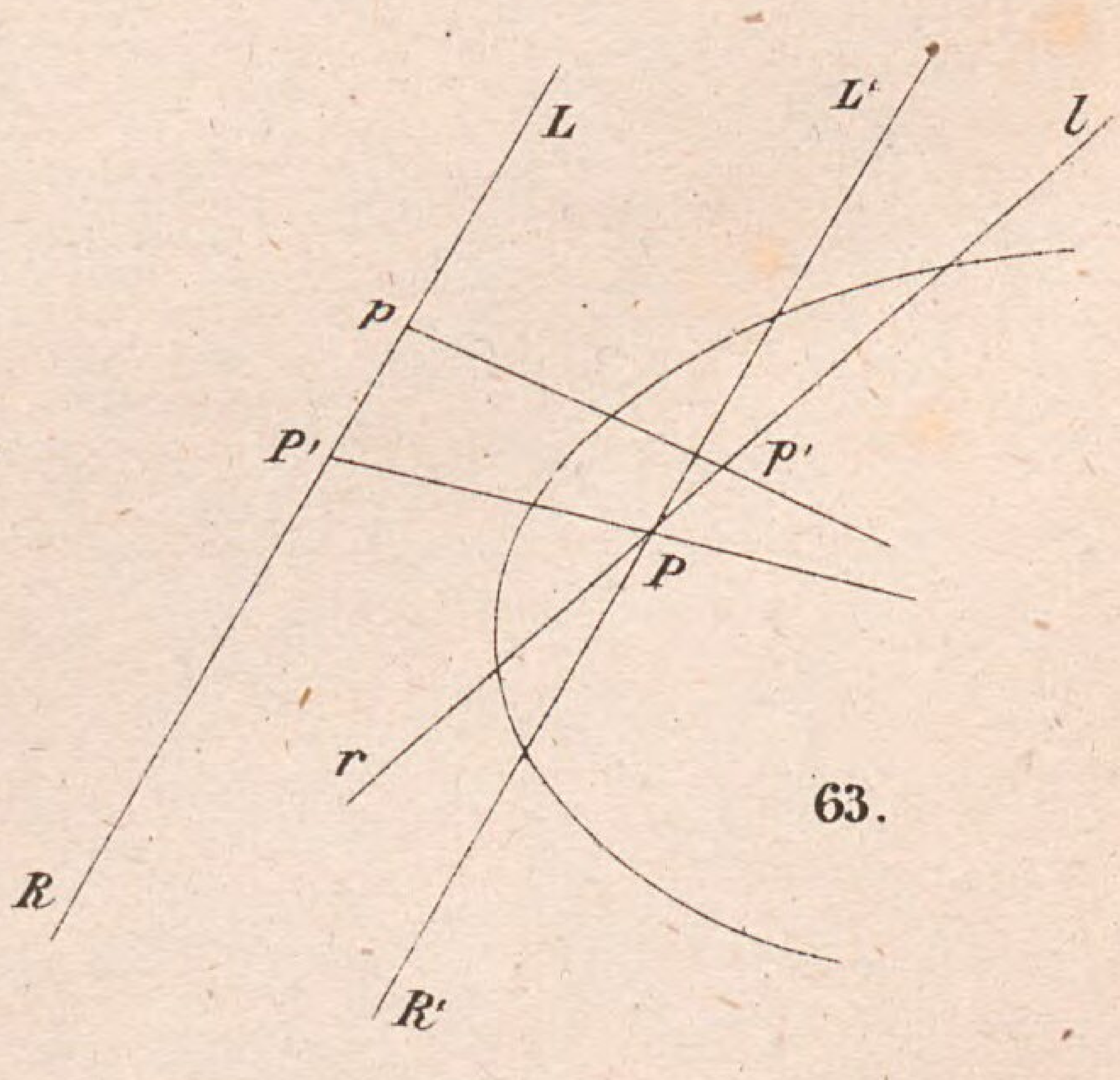

58.
Y
E
D
C
G
A
B
X

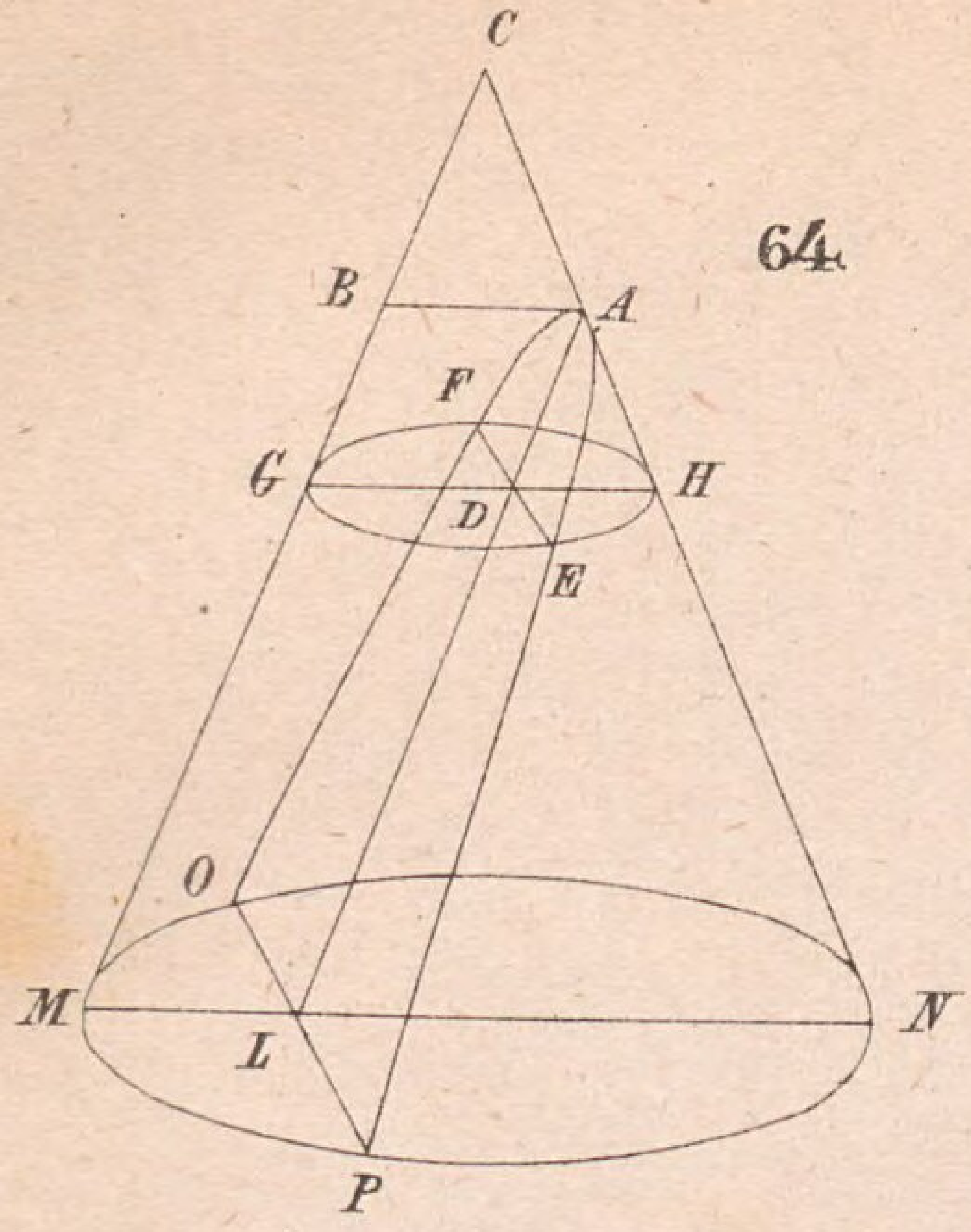

59.
Y
F
D
A
C
X
E
G


60.
L
L'
A
P'
G
P
B
D
R
R'

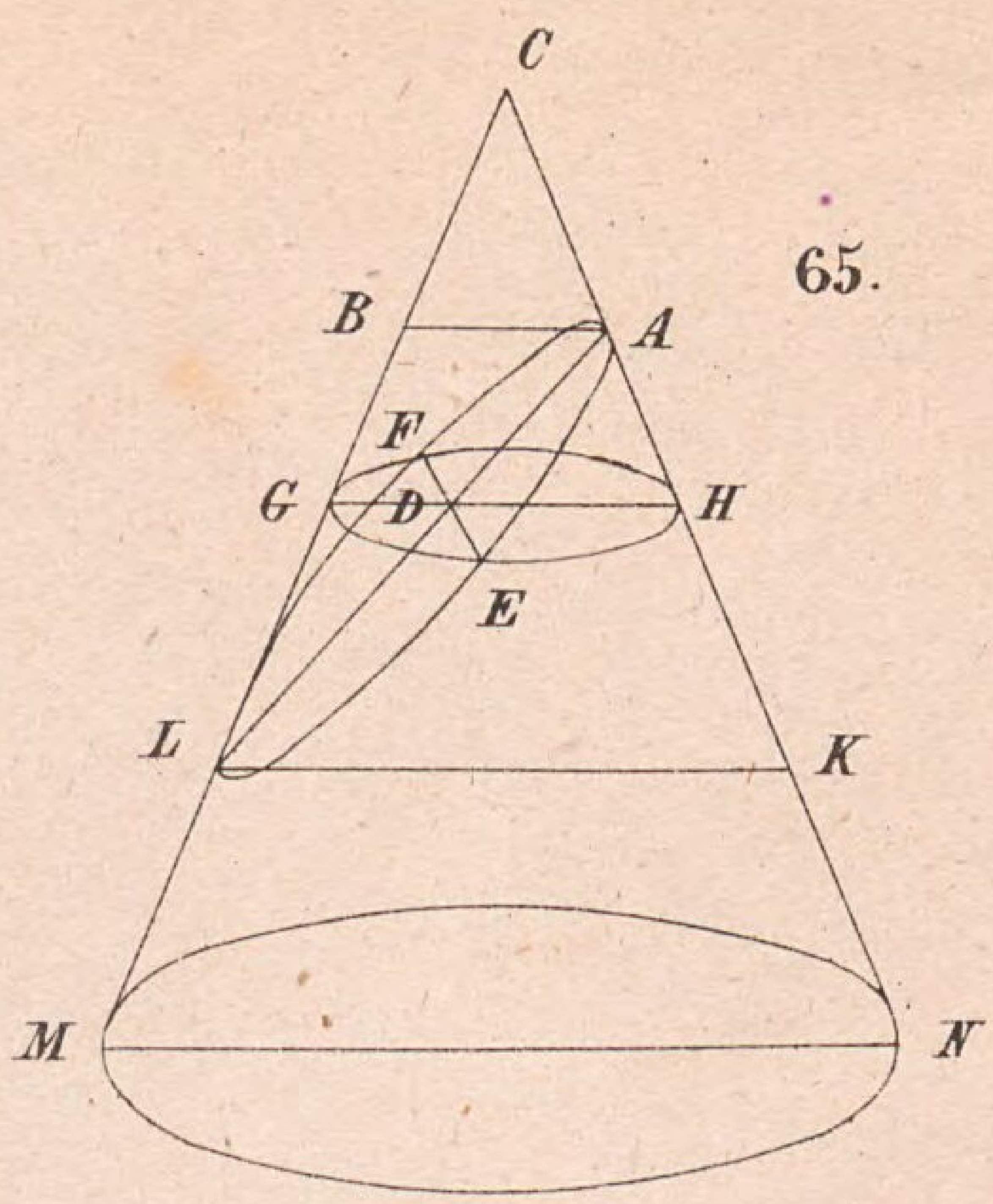

61.
A
B
C
F
E
L
D
H
K
G


62.
D
C
H
A
G
F
K
B
I

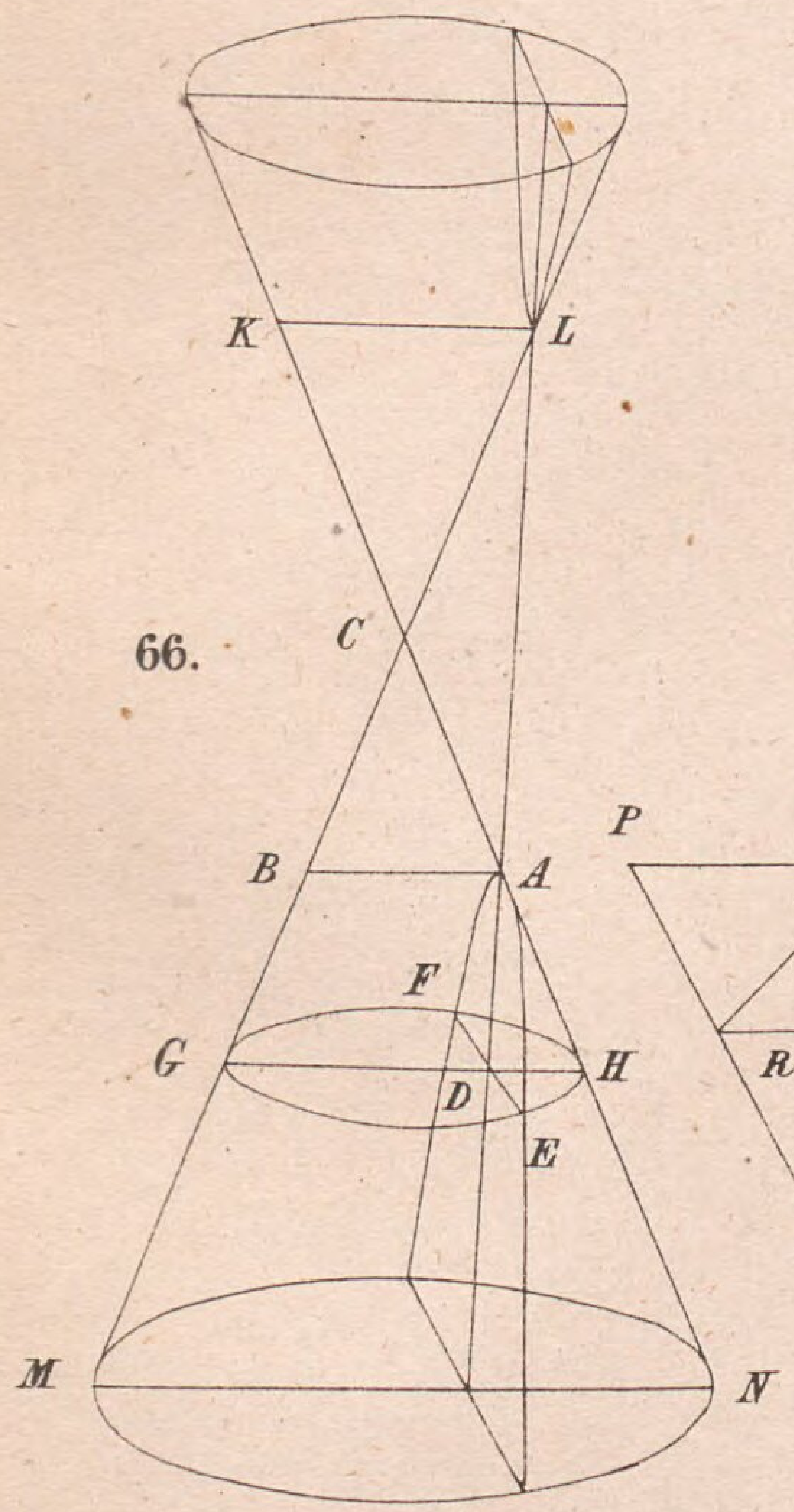

63.
L
L'
l
p
P'
p'
P
r
R
R'


C
B
A
F
G
H
D
E
O
M
N
L
P

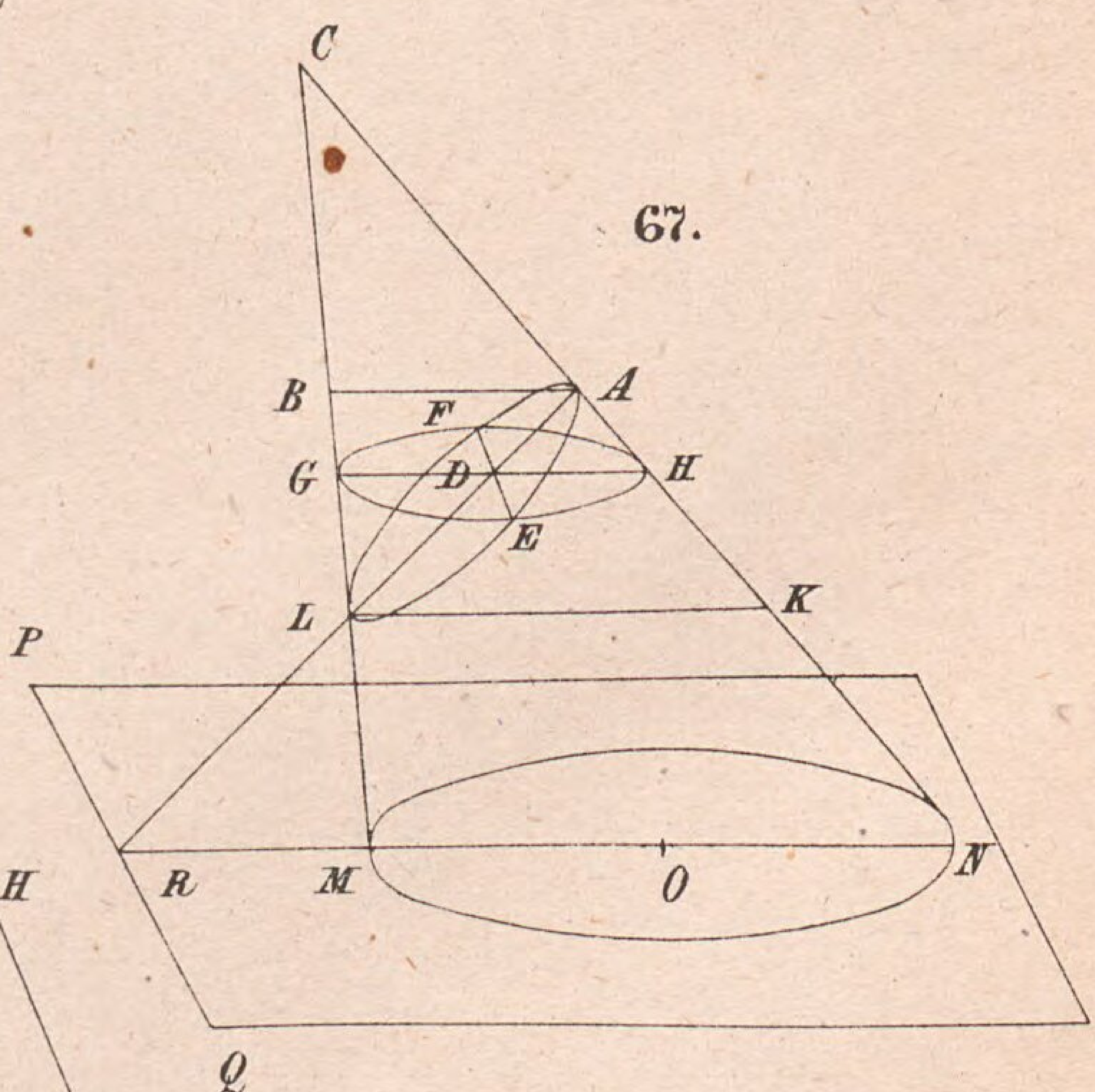
64.


C
B
A
F
G
D
H
E
L
K
M
N

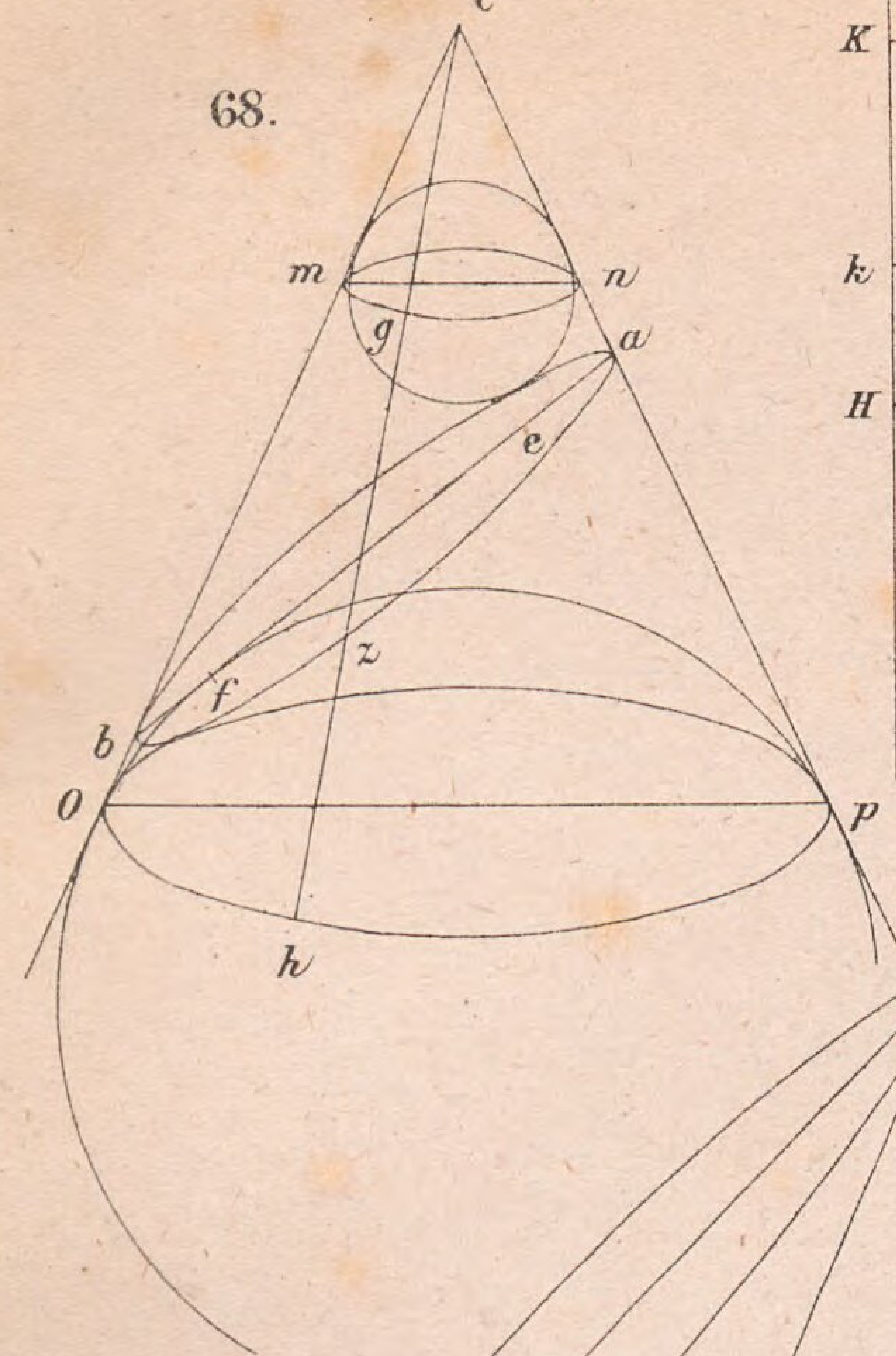
65.


K
L
C
B
A
F
G
H
D
E
M
N

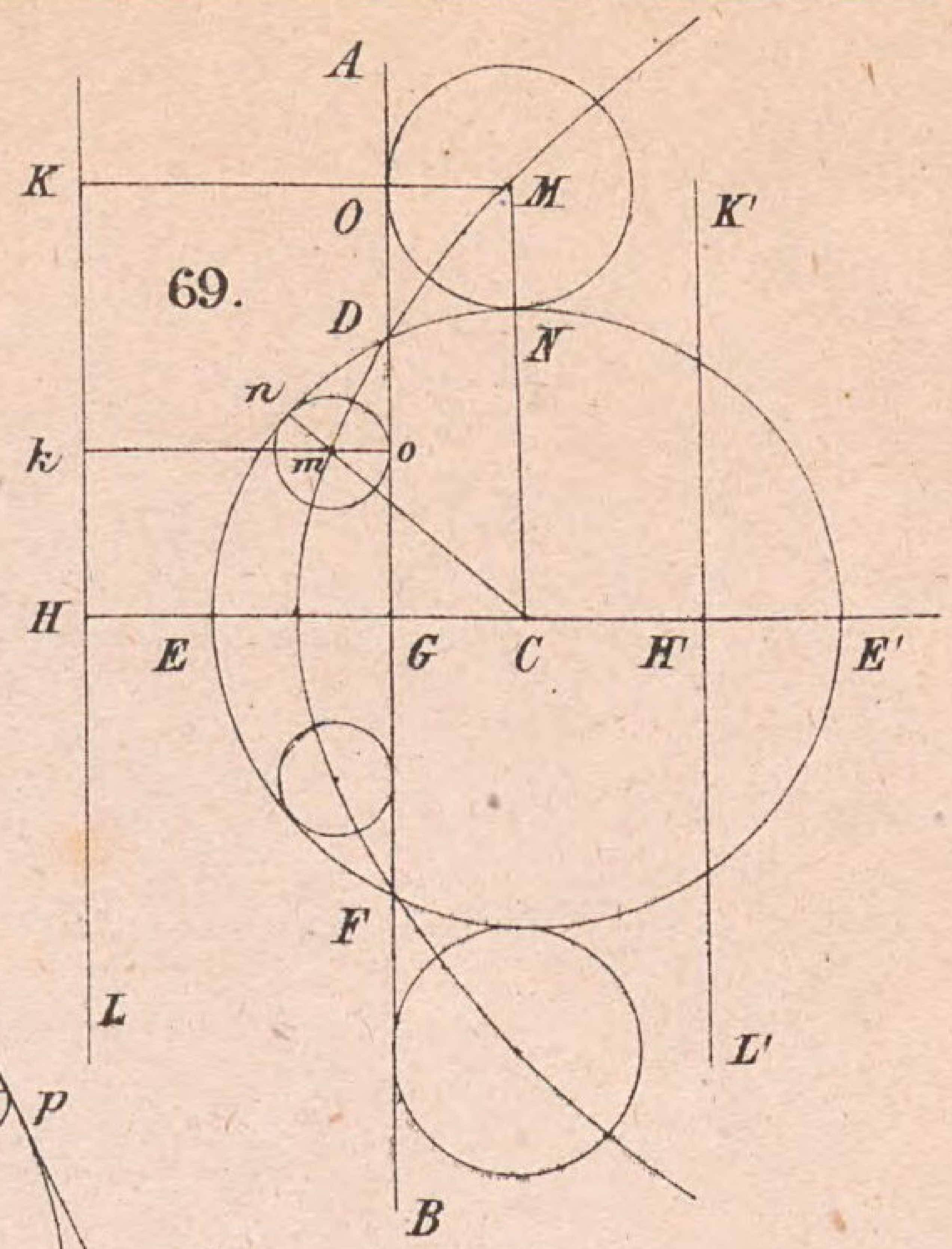
66.


C
B
A
F
G
D
H
E
L
K
P
R
M
O
N
Q

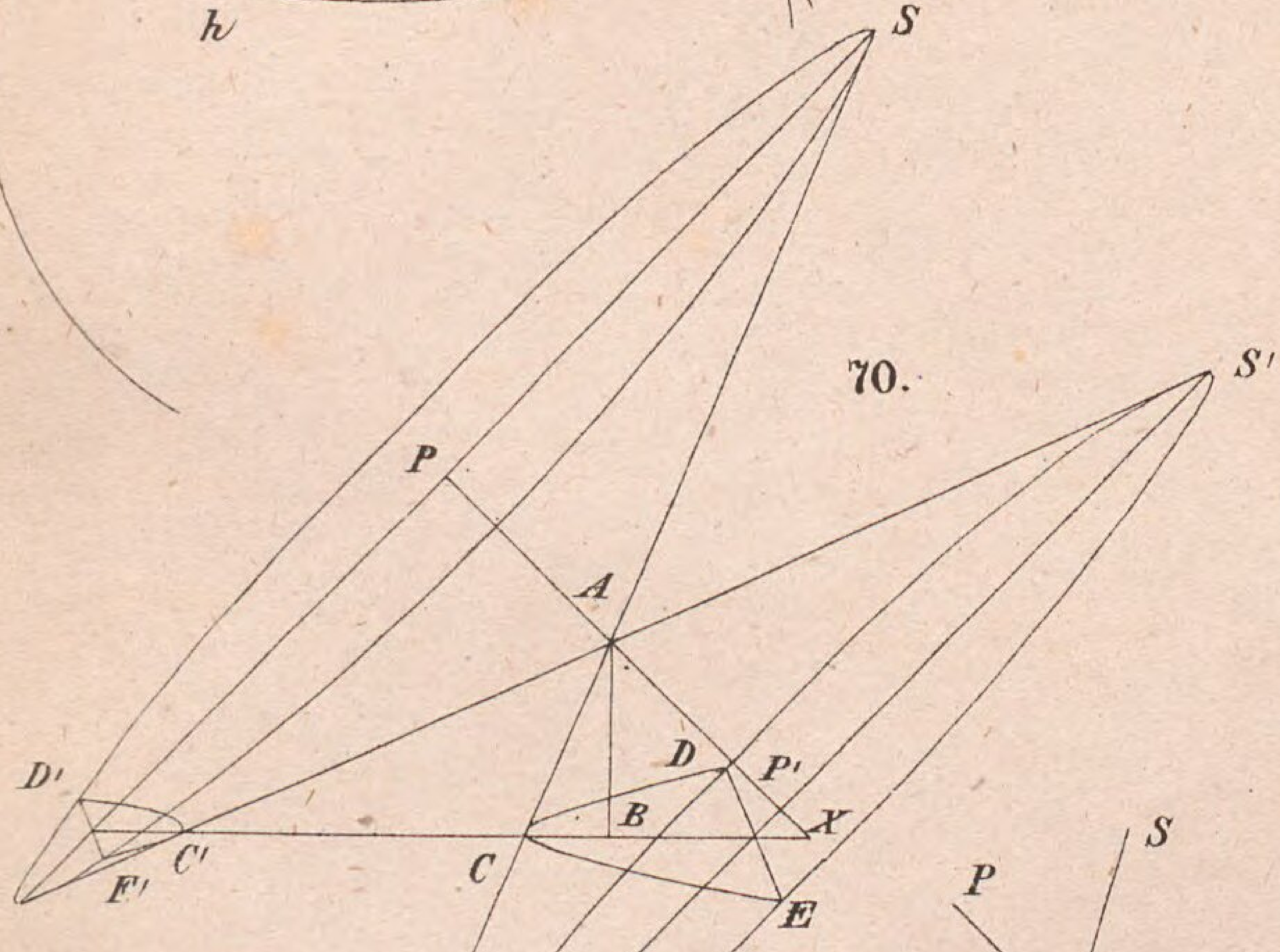
67.


C
m
n
g
a
e
z
f
b
O
P
h

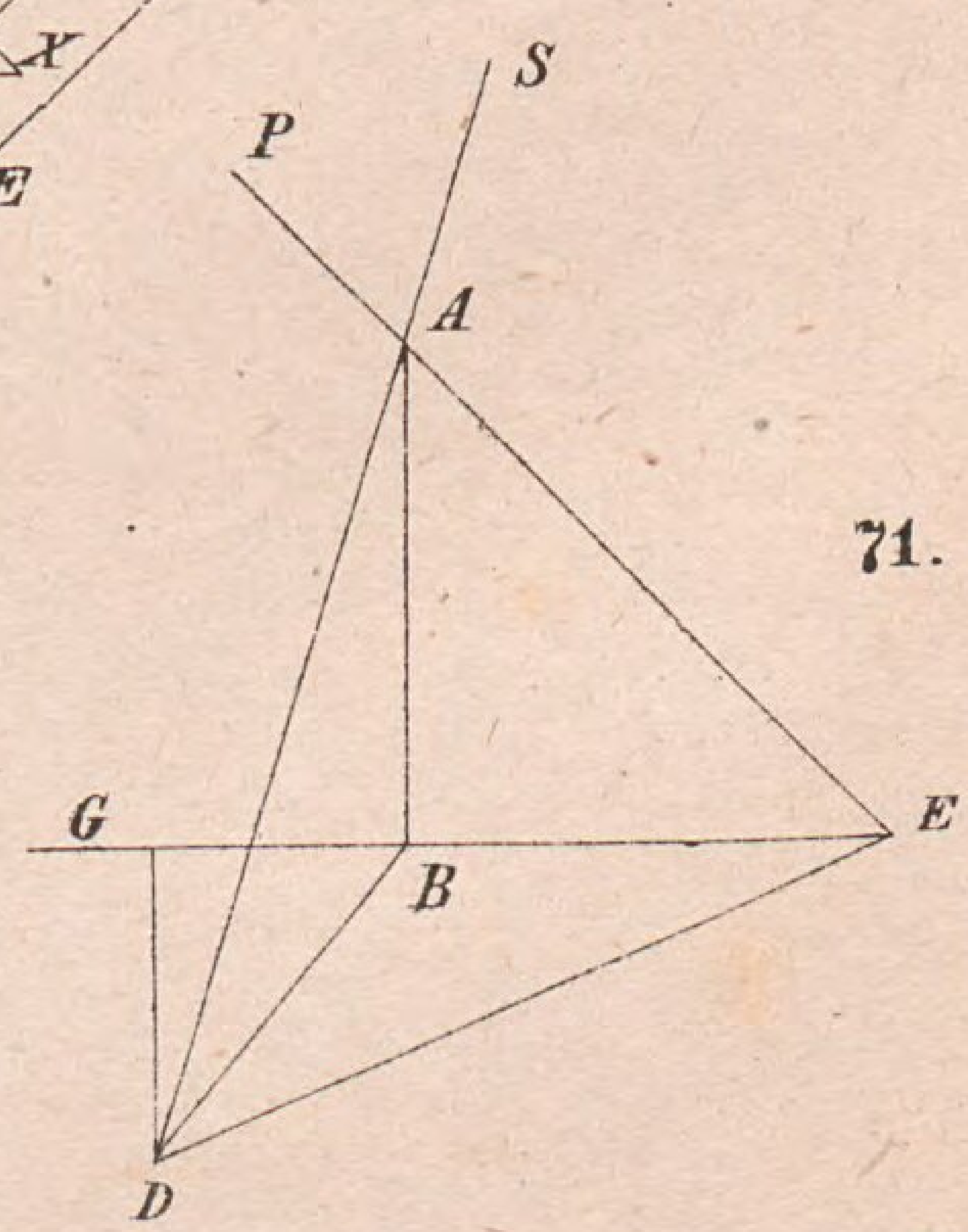
68.


A
K
O
M
K'
D
N
n
k
m
o
H
E
G
C
H'
E'
F
L
L'
B

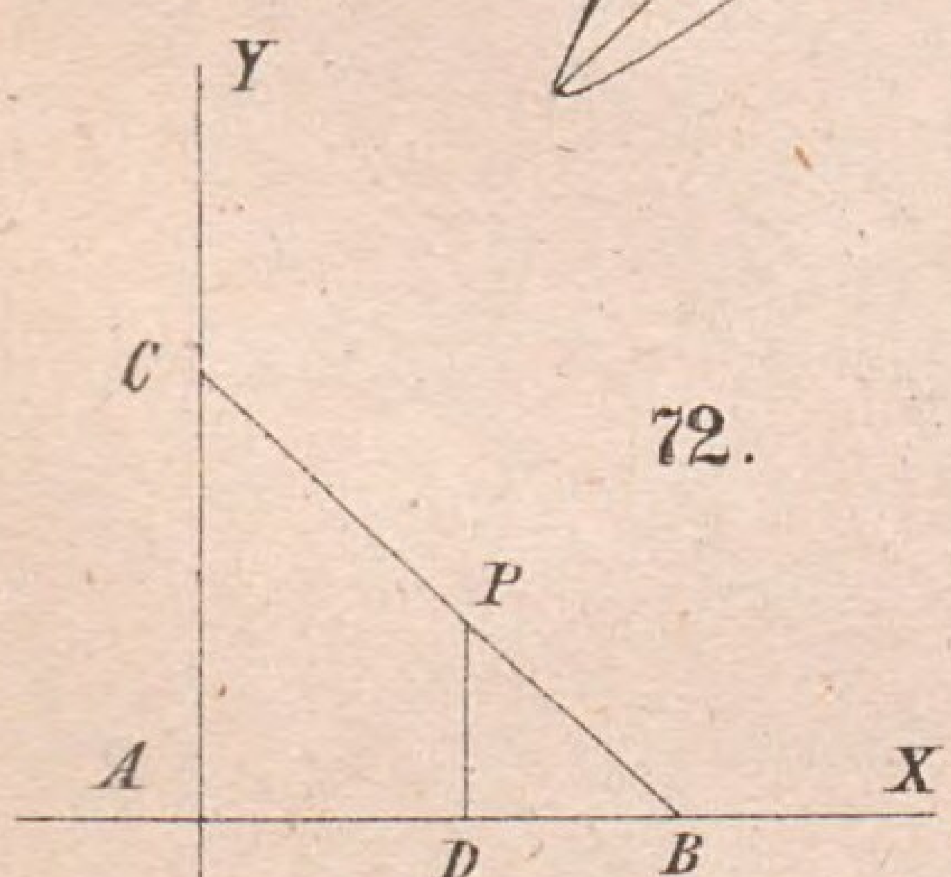
69.


S
S'
P
A
D
P'
D'
B
X
C'
F'
C
E

70.

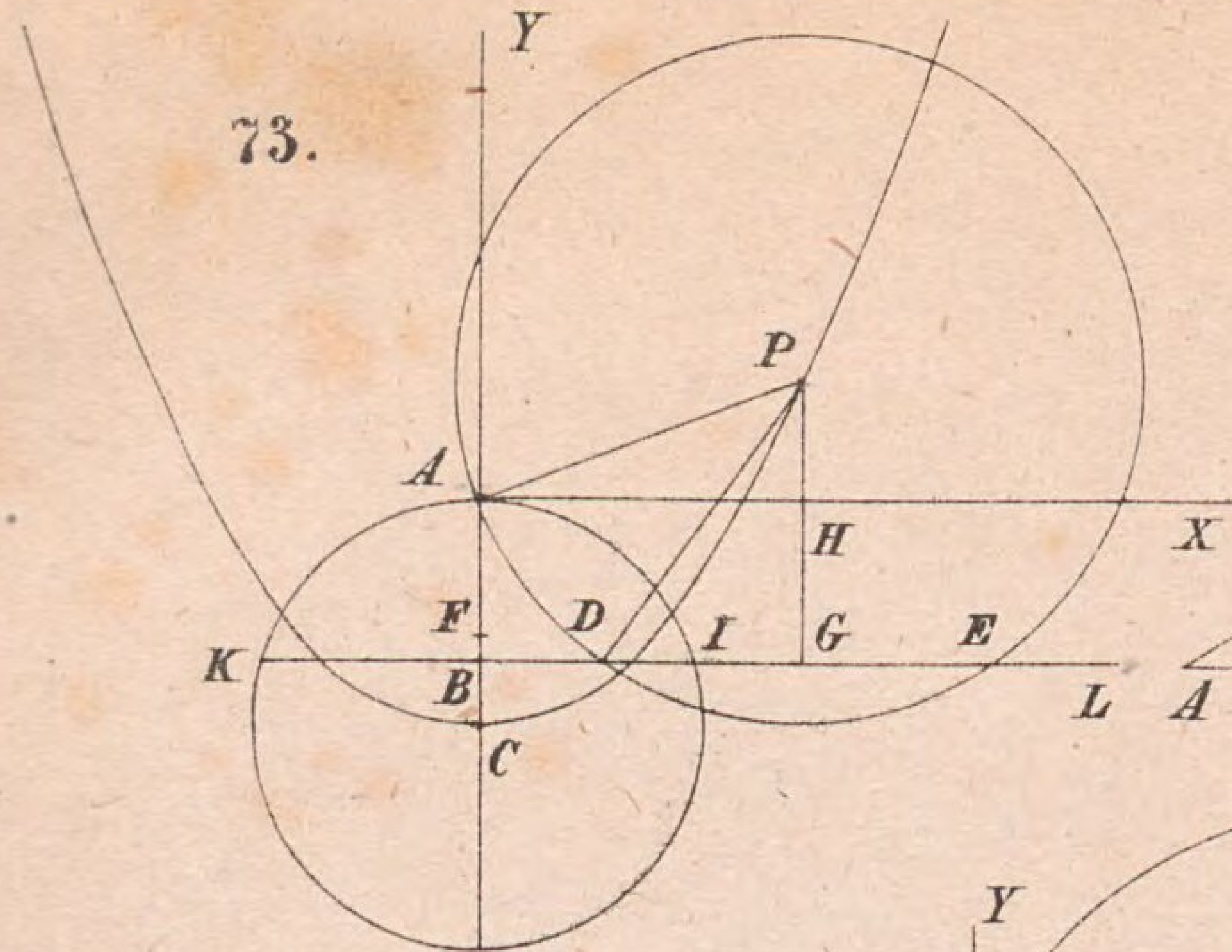

S
P
A
G
E
B
D

71.

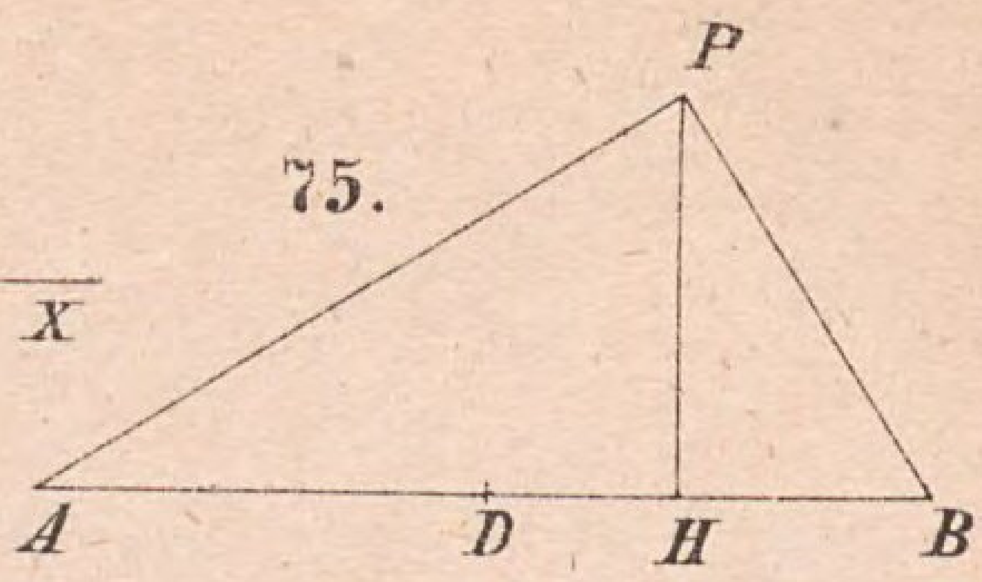

Y
C
P
A
X
D
B

72.

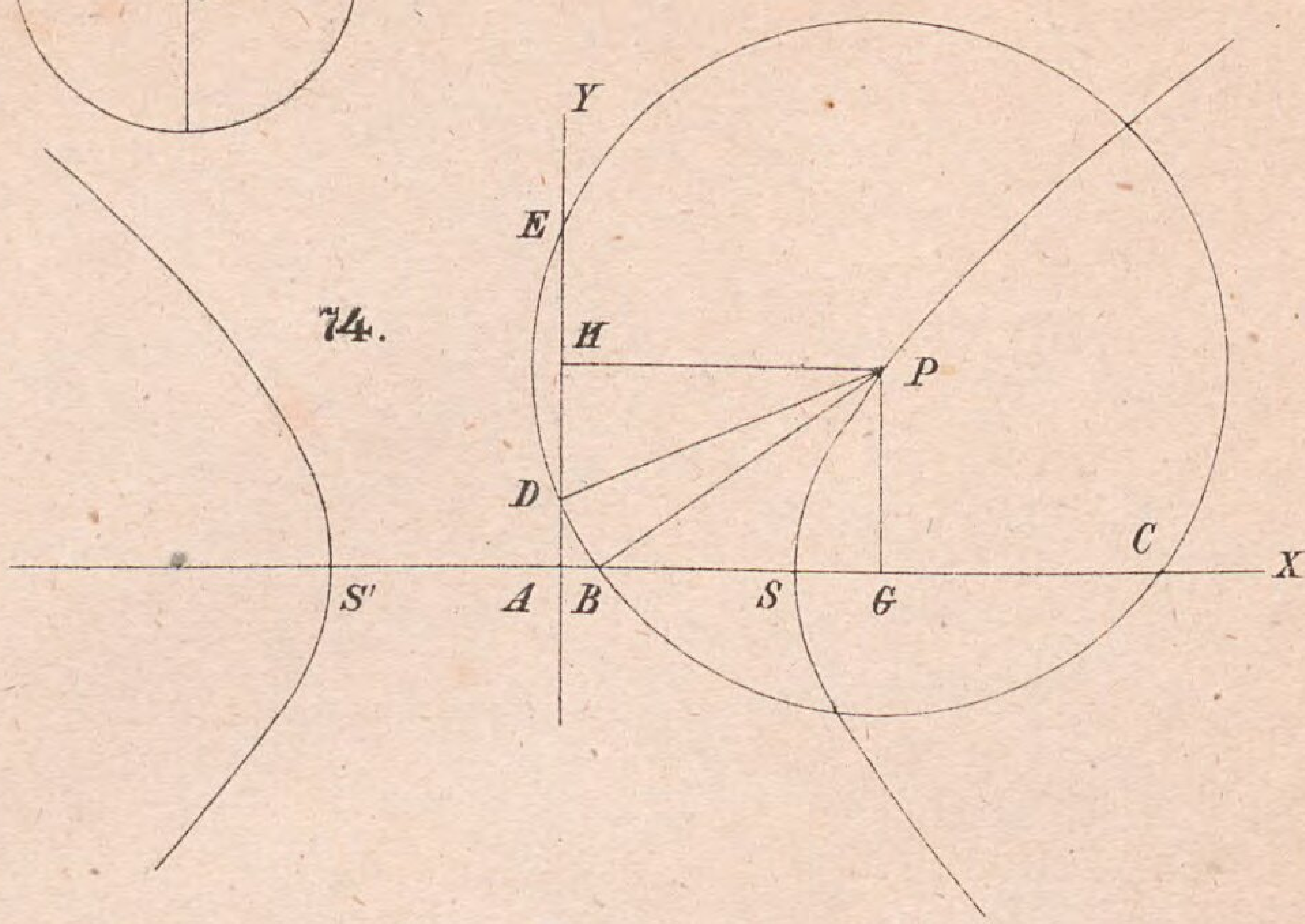
73.



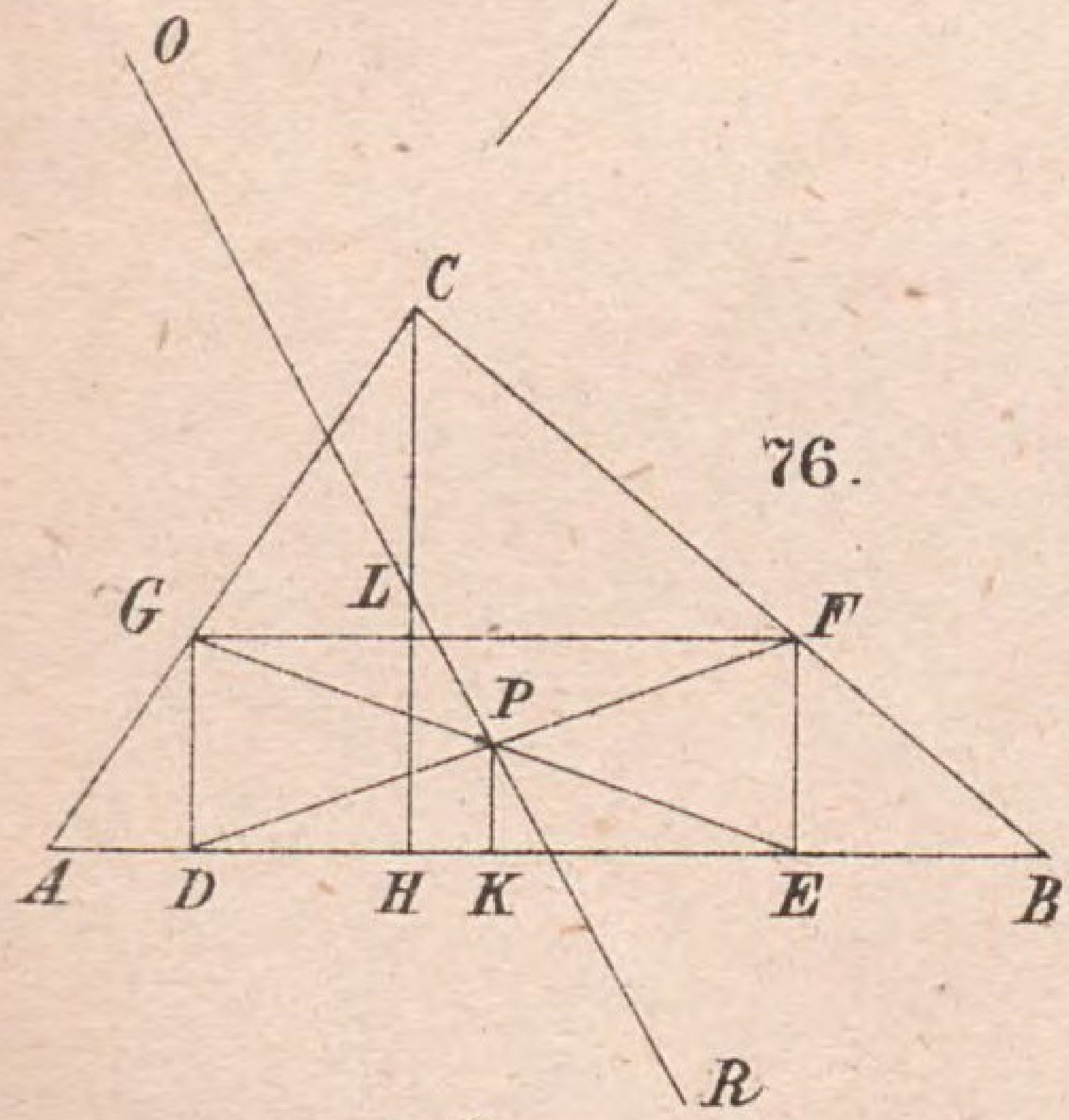
75.



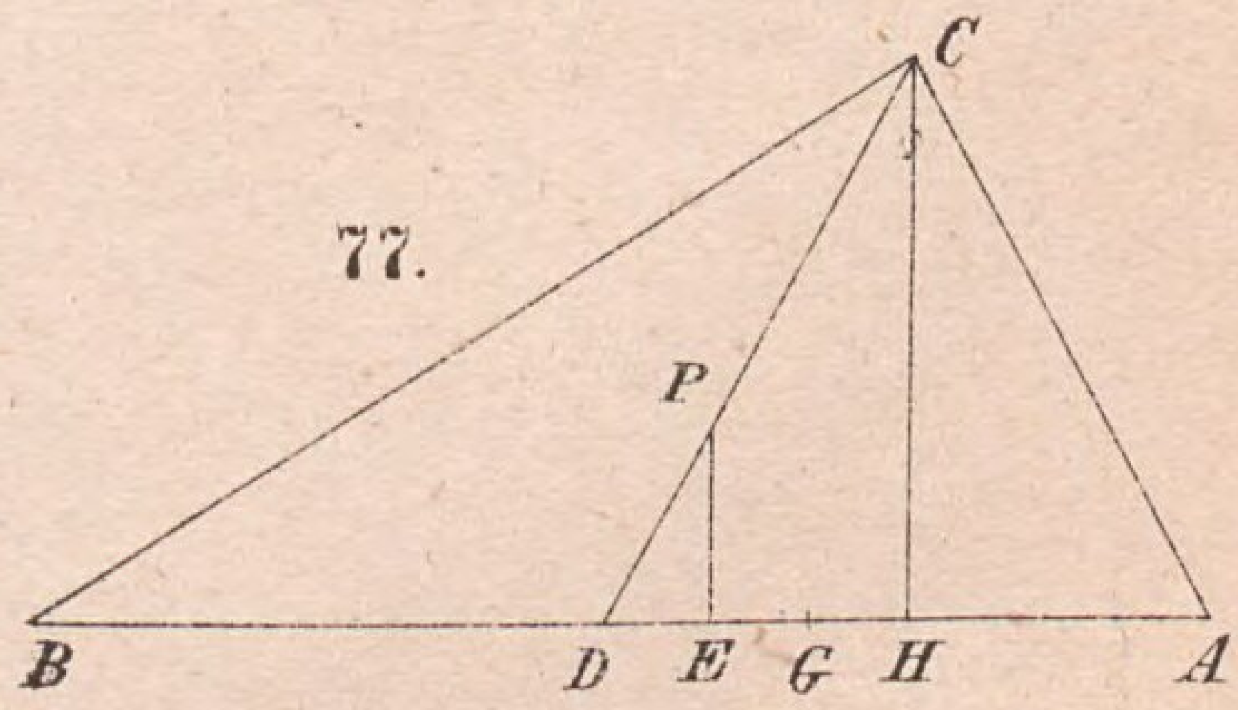
74.



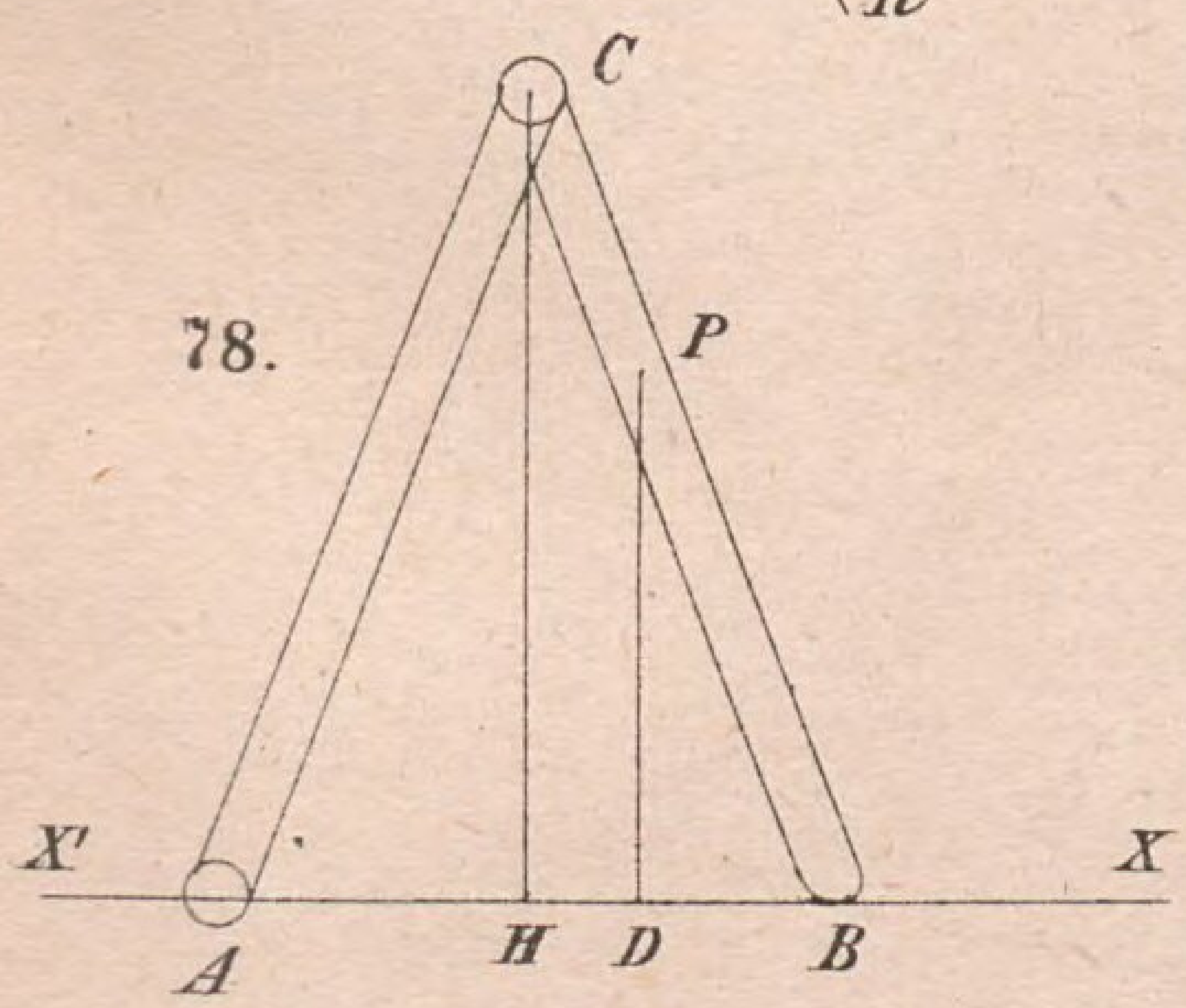
76.



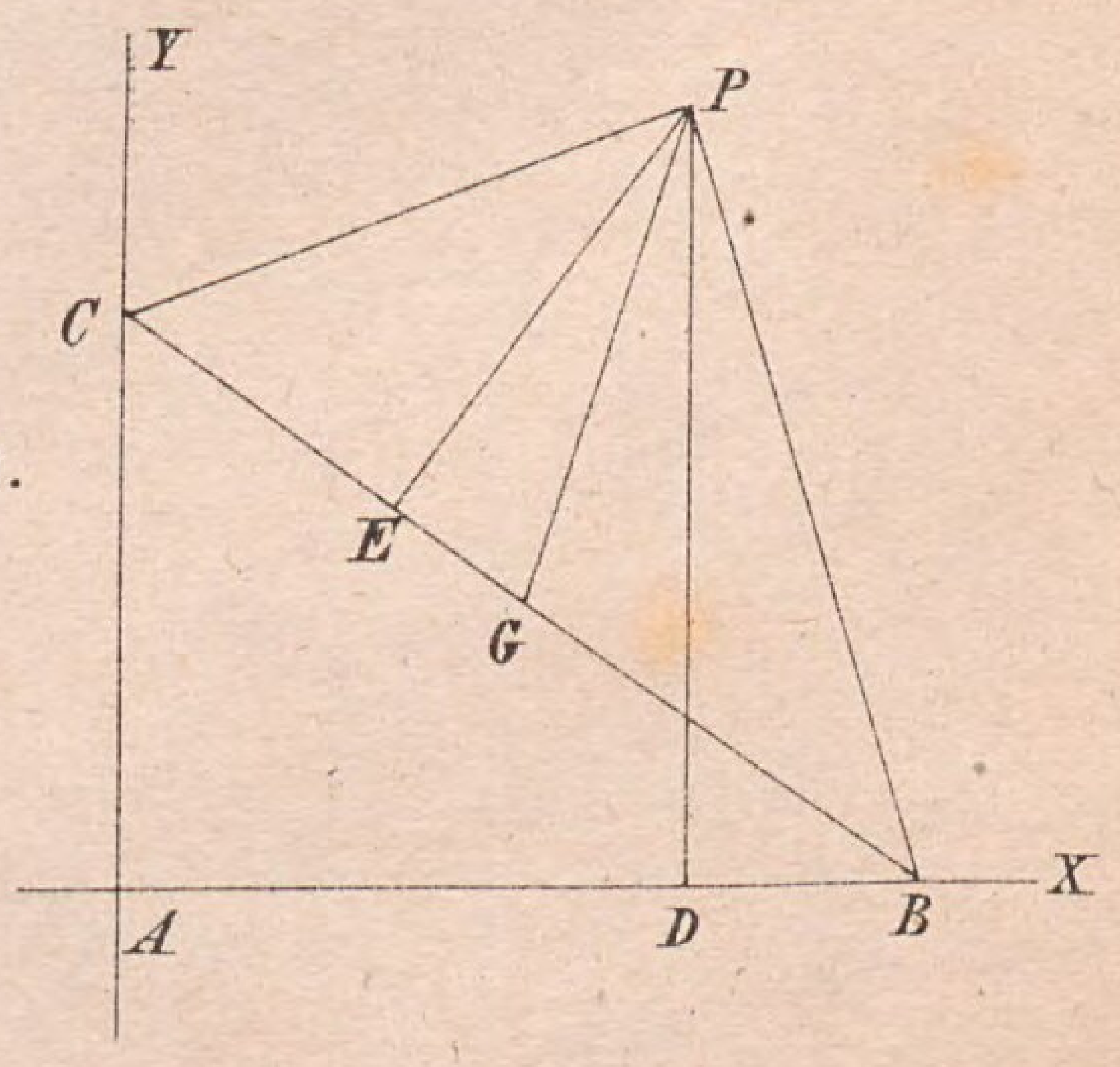
77.



78.



79.



Koppe, Karl Friedrich August,

Anfangsgründe der analytischen Geometrie und der Lehre von den Kegelschnitten für den Schul- und Selbst-Unterricht bearbeitet Mit 12 Figurentafeln

Essen 1868